Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 61 08/05/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Def. (SUPERFICIE "generale" - "non parametrizzabile")

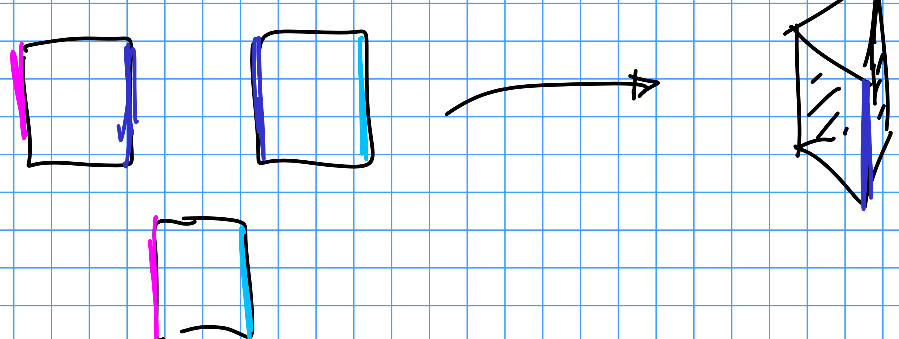
$S \subset \mathbb{R}^3$. Dico che S è una superficie regolare a tratti se

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_K$$ dove

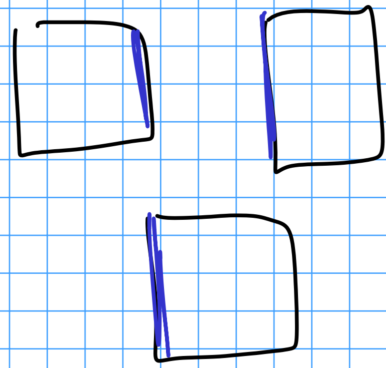
(a) Ogni S_i è una sup. par. (nel senso che abbiamo già definito)

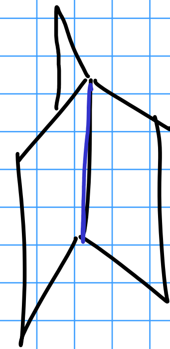
(b) Se $i \neq j$ $\quad S_i \cap S_j \subset \Sigma(S_i) \cap \Sigma(S_j)$

($\simeq$ le S_i si incollano tra loro sui bordi)



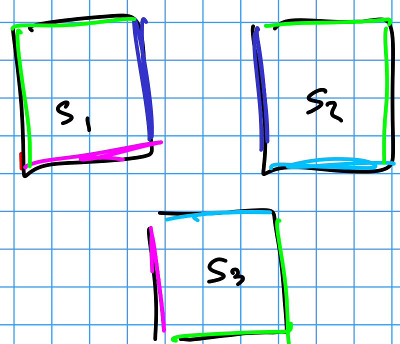
OK

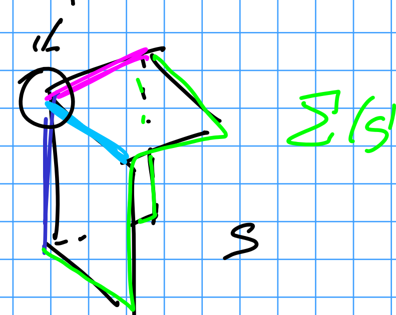




NON LO VOGLIO

(c) Se $i \neq j \neq k$ allora $S_i \cap S_j \cap S_k$ contiene un numero finito di punti





OK

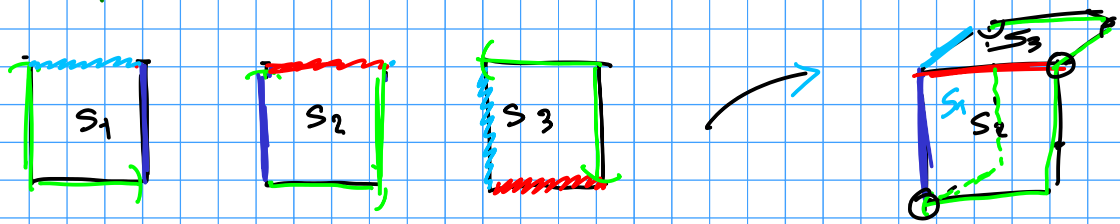
Per esempio la frontiera del cubo $S = \partial Q$
$Q = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ è una superficie che si ottiene incollando le sei facce

- Se S è descritta come sopra diciamo che $S_1 \dots S_k$ è una "DECOMPOSIZIONE" DI S

Def (BORDO) Se S è una sup. reg a tratti chiamo bordo di S, $\Sigma(S)$ l'insieme ottenuto come segue:

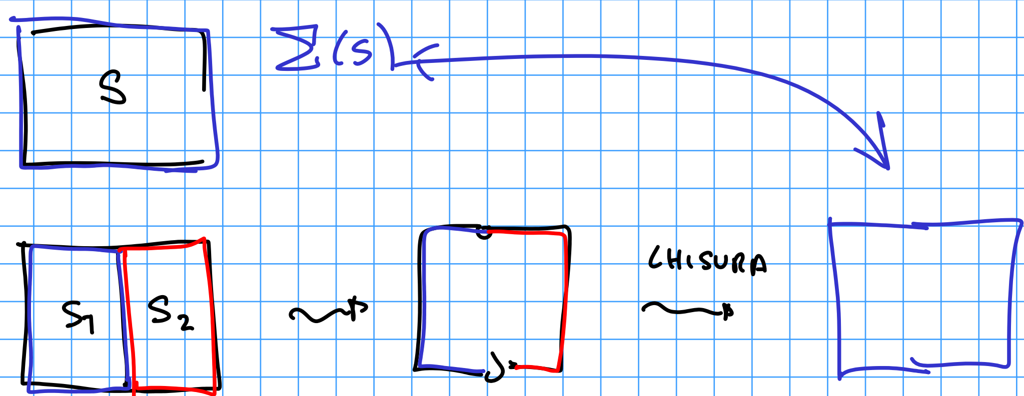
- prendo una suddivisione di S $S_1 \dots S_k$ e definisco $\quad \Sigma(S) = \overline{\bigcup_{i=1}^{k} \{ p \in \Sigma(S_i),\ p \notin \Sigma(S_j)\ \forall j \neq i \}}$

Per esempio



se non faccio la chiusura perdo i vertici - facendo la chiusura li riaggiungo !!

SI DIMOSTRA (con parecchia pazienza) che la def di $\Sigma(S)$ NON DIPENDE dalla suddivisione



Def. (PUNTI REGOLARI / PUNTI SINGOLARI)

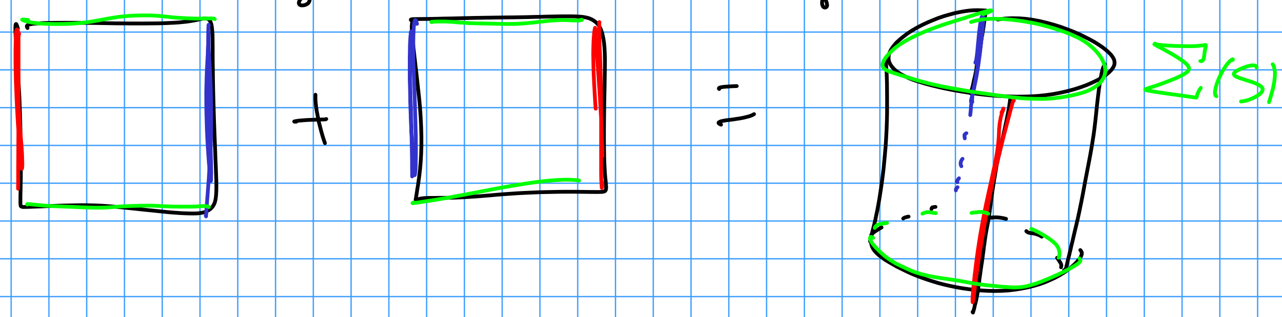
S superficie.

Un punto $P \in S$ si dice "REGOLARE" se esiste una suddivisione $S_1 .. S_k$ per S tale che

$$P \in S_i \setminus \Sigma(S_i) \quad \text{per un } i \text{ da } 1 \text{ a } K$$

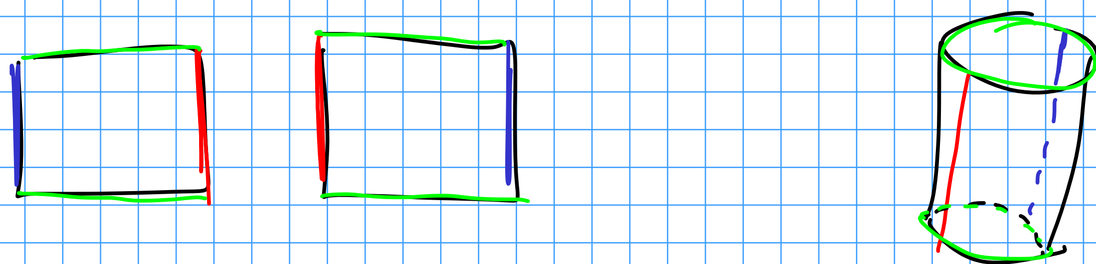
(Se $S = \partial Q$ $\quad$ P è regolare se e solo se P non è sugli spigoli)

Se P non è regolare dico che è singolare



Si aveva che tutti i punti che non sono blu o rossi o verdi sono regolari.

Ma anche i pti blu e rossi sono regolari perché posso trovare un'altra suddivisione che "li scansa"



DUNQUE IN QUESTO ESEMPIO I PTI SINGOLARI (NON REGOLARI) COINCIDONO CON $\Sigma'(S)$

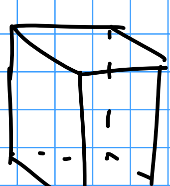
· Se P non è regolare dico che P è SINGOLARE

INDICO CON $\Sigma'^{*}(S) = \{\text{pti singolari}\}$

È chiaro che $\Sigma'(S) \subset \Sigma'^{*}(S)$

ESEMPIO $\quad S = \partial Q$

$$\Sigma'(S) = \emptyset$$
$$\Sigma'^{*}(S) = \{\text{SPIGOLI}\}$$



INOLTRE se $P \in S$ è regolare posso definire il piano tangente e la retta normale a S in P COME

$$T_S(P) := T_{S_i}(P)$$

dove S_i è un elemento della suddivisione tale che: $P \in S_i \setminus \Sigma'(S_i)$

$$N_S(P) = N_{S_i}(P)$$

DUNQUE UNA SUP. REG A TRATTI AMMETTE PIANO TANGENTE E RETTA NORMALE NEI PUNTI REGOLARI

ESEMPIO $S = \{x^2+y^2+z^2 = R^2\}$ è un sup.

ottenuta incollando S^+ e S^- dove

$S^+ = \{x^2+y^2+z^2 = R^2 \quad z \geq 0\}$
$S^- = \{x^2+y^2+z^2 = R^2 \quad z \leq 0\}$ (sup cartesiane)

INCOLLATE SU $\{x^2+y^2 = R^2 \quad z=0\}$

SI VEDE CHE $\Sigma(S) = \Sigma^*(S) = \phi$

TEOREMA Supponiamo che D sia un dominio reg. a tratti e che $G_1 \dots G_K$ siano le funzioni definenti, cioè:

$$D = \{G_1 \leq 0, \dots, G_K \leq 0\}$$

dove se $P \in D$ $G_{i_1}(P) = \dots = G_{i_k}(P) = 0$ allora

$$\nabla G_{i_1}(P), \dots, \nabla G_{i_k}(P) \text{ sono lin. ind.}$$

SAPPIAMO CHE $\partial D = \bigcup_{i=1}^{K} \{P \in D : G_i(P) = 0\}$.

ALLORA $S = \partial D$ è una sup regolare a tratti

con $\Sigma(S) = \phi$ e

$$\Sigma^*(S) = \{P \in S : \exists i,j \quad i \neq j \quad G_i(P) = G_j(P) = 0\}$$

DUNQUE SE D è REGOLARE, CIOÈ C'È UNA SOLA G $\Rightarrow$ ∂D è REGOLARE $(\Sigma^*(S) = \phi)$

ESEMPI: ∂Q è una sup reg a tratti, $\Sigma'(\partial Q)=\emptyset$
e $\Sigma^*(\partial Q) = \{$spigoli$\}$

· $S = \partial B_R$ dove $B_R = \{x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$
è una superficie regolare con $\Sigma'(S)=\emptyset$

INOLTRE (continuando l'enunciato)
Se $P \in \partial D$ è un punto regolare, allora

$$N_P(\partial D) = \{\lambda \nabla G_i(P), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

dove i è l'unico indice per cui $G_i(P) = 0$

sei funzioni G:
$-x, -y, -z$
$x-1, y-1, z-1$

ESEMPI $Q = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

$$S = \partial Q = \{P \in Q : x=0\} \cup \{P \in Q : x=1\} \cup \{P \in Q : y=0\} \cup \{P \in Q : y=1\} \cup \{P \in Q : z=0\} \cup \{P \in Q : z=1\}$$

$(P=(x,y,z))$

$$\Sigma^*(S) = \{(0,0,z) : 0 \leq z \leq 1\} \cup \{(0,y,0) : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,0,0) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0,1,z) : 0 \leq z \leq 1\} \cup$$
$$\{(0,y,1) : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,0,1) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(1,0,z) : 0 \leq z \leq 1\} \cup \{(1,y,0) : 0 \leq y \leq 1\} \cup$$
$$\{(x,1,0) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(1,1,z) : 0 \leq z \leq 1\} \cup \{(1,y,1) : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,1,1) : 0 \leq x \leq 1\}$$

(12 SPIGOLI

$S \setminus \Sigma^*(S)$ = "PARTE INTERNA" DELLE 6 FACCE:

$\{(0,y,z):\ 0<y<1,\ 0<z<1\}\cup$

$\{(1,y,z):\ 0<y<1,\ 0<y<1\}\cup$

$\{(x,0,z):\ 0<x<1,\ 0<z<1\}\cup$

$\{(x,1,z):\ 0<x<1,\ 0<z<1\}\cup$

$\{(x,y,0):\ 0<x<1,\ 0<y<1\}\cup$

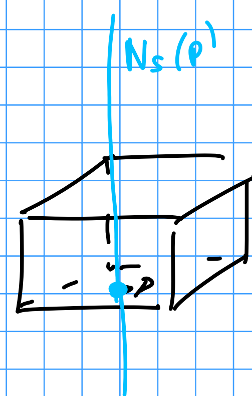
$\{(x,y,1):\ 0<x<1,\ 0<y<1\}$

Per esempio su $F_1 = \{(0,y,z) \quad 0<y<1,\ 0<z<1)$

ho che si annulla la funzione $G(x,y,z) := -x$

$\nabla G = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} = -\vec{i} \Rightarrow$ se $P \in F_1$

$N_S(P) = \{\lambda \vec{i},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$



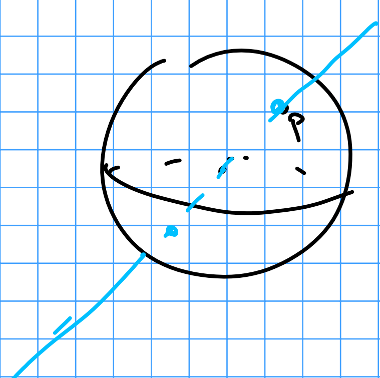
ESEMPIO $\quad S = \{x^2+y^2+z^2 = R^2\} \Rightarrow S = \partial B$

$B = \{x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$ $\quad G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2$

$\nabla G = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$

C'È UNA SOLA G $\Rightarrow$ S è regolare.

Se $P \in S \Rightarrow N_S(P) = \{\lambda \nabla G(P)\} = \{\lambda P \quad \lambda \in \mathbb{R})$



ABBIAMO TROVATO CHE
LA NORMALE A ∂D nei punti di ∂D
coincide con la normale definita a suo tempo.

Def. (INTEGRALI SU S).

Siamo S è un sup. e $f : S \to \mathbb{R}$.

(a) Se $f \geq 0$ definisco l'integrale (di I° specie) di f su S

ponendo $\displaystyle \iint_S f \, d\sigma := \sum_{i=1}^{k} \iint_{S_i} f \, d\sigma$

dove $S_1 \dots S_k$ è una suddivisione di S.

Questo integrale può fare $+\infty$

Nel caso $f = 1$ ho definito l'area di S

$$\text{Area}(S) = \iint_S 1 \, d\sigma = \sum_{i=1}^{k} \text{Area}(S_i)$$

(b) Se $f : S \to \mathbb{R}$ dico che è integrabile se

$$\iint_S f^+ \, d\sigma < +\infty \qquad \iint_S f^- \, d\sigma < +\infty$$

e chiamo integrale di f su S il numero reale

$$\iint_S f \, d\sigma := \iint_S f^+ \, d\sigma - \iint_S f^- \, d\sigma \qquad (\underline{\text{finito}})$$

SI DIMOSTRA CHE QUESTI NUMERI <u>NON</u>

dipendono dalla suddivisione

OSS. Nel caso in cui $S = \Gamma(\bar{\Omega})$ dove Γ è $C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ ed esiste un insieme $E \subset \bar{\Omega}$ con $m(E)=0$ (in $\mathbb{R}^2$) per cui

- $\Gamma : \bar{\Omega} \setminus E \to \mathbb{R}^3$ è iniettiva
- $\vec{N}_\Gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \neq 0$ nei punti di $\mathring{\Omega} \setminus E$

$$\Rightarrow \iint_S f \, d\sigma = \iint_{\bar{\Omega}} f(\Gamma(u,v)) \, \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\| \, du \, dv$$

Anche se Γ non è una vera parametrizzazione

(SI PUÒ DIMOSTRARE ...)

Per esempio le coordinate sferiche su $S = \{x^2+y^2+z^2 = R^2\}$

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_{\substack{0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi}} f(R\cos\theta \sin\varphi, R\sin\theta \sin\varphi, R\cos\varphi) \cdot \underbrace{R^2 \sin\varphi}_{\|\vec{N}\|} \, d\theta \, d\varphi$$

QUANTO DETTO ORA RIGUARDA GLI INTEGRALI DI I° SPECIE

PER PARLARE DI FLUSSO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE S (NON PARAMETRICA) DEVO INTRODURRE LA NOZIONE DI

$$\boxed{\text{SUPERFICIE ORIENTABILE}}$$

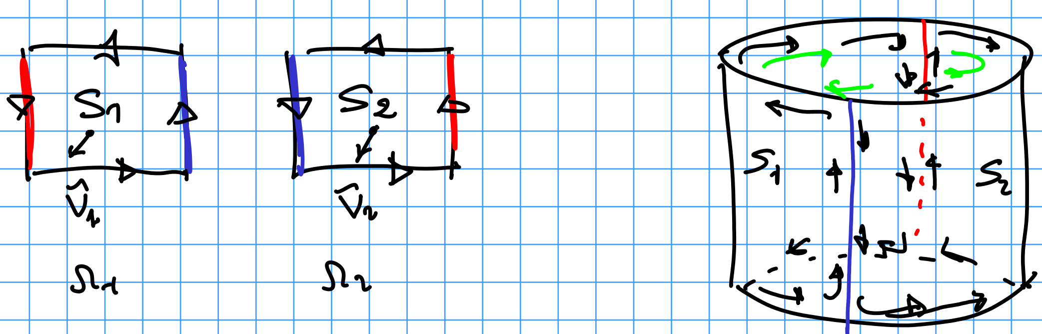
DEF Ricordiamo che se S è una sup. PAR.

è sempre possibile scegliere un versore normale $\hat{\nu}$ su $S \setminus \Sigma(S)$ che varia con continuità.
(Se S è connessa ho solo due possibilità)
Inoltre se è assegnato $\hat{\nu}$, automaticamente è assegnato un verso su $\Sigma(S)$.

DICO CHE UNA SUPERIFICE È ORIENTABILE

Se esiste $S_1 \dots S_k$ suddivisione di S e per ogni S_i esiste un'orientazione ν_i di S_i

IN MODO CHE
NEI PUNTI $P \in \Sigma(S_i) \cap \Sigma(S_j)$ $\quad i \neq j$
il verso di $\Sigma(S_i)$ e il verso di $\Sigma(S_j)$ sono OPPOSTI



- SE S è ORIENTABILE HO DATO IN OGNI PUNTO P DI $S \setminus \Sigma^*(S)$ un verso $\hat{\nu}$ che appartiene a $N_P(S)$
- INOLTRE, CON QUESTA COSTRUZIONE, HO DATO

UN VERSO SU $\Sigma(S)$, che è il verso di $\Sigma(S_i)$ nei punti $P \in \Sigma(S_i)$ che non si incollano

NELL'ESEMPIO DEL CILINDRO HO