Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

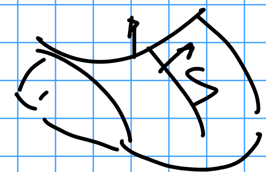
Lezione 60 03/05/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

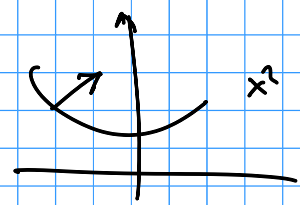
Continuazione

$$S = (z = x^2 - y^2 \ , \ x^2 + y^2 \le 1)$$



$$\hat{\nu}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \Big(\underbrace{-2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}}_{\vec{N}_p} \Big)$$

correzione rispetto a ieri



$$\vec{f}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Calcoli fatti ieri:

$$\iint_B \vec{f}(u, v, u^2 - v^2) \cdot \vec{N}_p(u,v) \, du \, dv =$$

$$\iint_B \left(u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2 - v^2)\vec{k} \right) \left(-2u\vec{i} + 2v\vec{j} + \vec{k} \right) du \, dv$$

$$\iint_B \left(-2u^2 + 2v^2 + (u^2 - v^2) \right) du \, dv = \iint_B (-u^2 + v^2) \, du \, dv$$

$B = \{ u^2 + v^2 < 1 \}$

coordinate polari $\rightarrow$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (-\cos^2\theta + \sin^2\theta) \rho^2 \, \rho \, d\rho$

$$-\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)\,d\theta \int_0^1 \rho^3\,d\rho = -\underbrace{\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi}}_{=0}\ \underbrace{\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1}_{\frac{1}{4}}$$

Se prendo $S^+ = \{(x,y,z)\in S : x\geq 0 \quad y\geq 0\}$, stessi calcoli

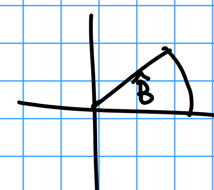
$$\Phi(\vec{g}, S^+, \hat{\nu}) = \iint_{B^+} (v^2-u^2)\,du\,dv \qquad B^+=\{u^2+v^2\leq 1,\ u\geq 0\ v\geq 0\}$$

$$= -\int_0^{\pi/2}\cos(2\theta)\int_0^1 \rho^3\,d\rho = -\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} = 0$$

Proviamo con $\hat{S} = \{(x,y,z) : \ x\geq 0 \quad 0\leq y\leq x\}$

che corrisponde al grafico di $g(x,y)=x^2-y^2$ su

$\hat{B}=\{x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq x,\ 0\leq y\leq x\}$



Stessi calcoli ...

$$\Phi(\vec{g}, \hat{S}, \hat{\nu}) = \dots = -\int_0^{\pi/4}\cos(2\theta)\,d\theta \int_0^1 \rho^3\,d\rho =$$

$$-\underbrace{\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/4}}_{1/2}\ \underbrace{\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1}_{1/4} = -\frac{1}{8}$$

Def. (ci servirà più avanti)

VOGLIO DEFINIRE IL "VERSO DI $\partial(S)$" COERENTE a $\hat{\nu}$

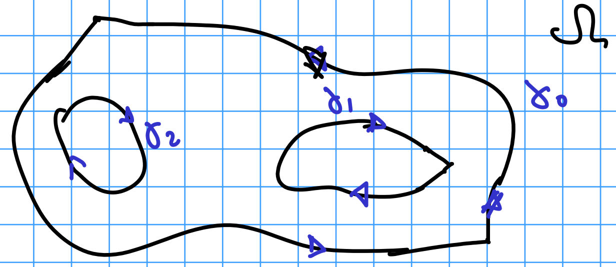
(NEL CASO DI $(S,\hat{\nu})$ sup orientata)

COMINCIO DA ALCUNE OSSERVAZIONI che riguardano $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ aperto regolare e buoni

Ω lo prendo sempre connesso per semplicità

OSS Se Ω è reg. e buoni in $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ LIMITATO

(a) $\partial\Omega\ (=\partial\bar{\Omega})$ è descritto da un numero finito di curve $\gamma_0, \gamma_1 \dots \gamma_K$ chiuse e regolari a tratti



(ATTENZIONE IN TUTTE LE DEF. SI PRENDE Ω LIMITATO)

(γ_0 c'è sempre. Se Ω ha buchi ce ne sono altre)

IN MODO RIGOROSO: $\exists\ \gamma_0, \gamma_1 \dots \gamma_K : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ $(K \geq 0)$

curve regolari a tratti, chiuse, γ_i iniettive tranne che agli estremi, tali che

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=0}^{K} \text{sostegno}(\gamma_i) = \bigcup_{i=0}^{K} \gamma_i([a,b])$$

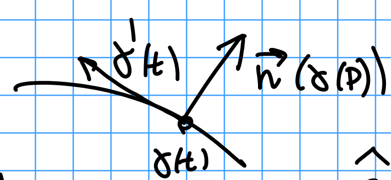
QUESTA È UNA CONSEGUENZA (NON IMMEDIATA) del teorema del Dini

(b) Oltre a quanto detto in (a) posso supporre che le curve γ_i "girino tenendo Ω a sinistra"

Formalmente questo si dice chiedendo che $\vec{n}(\gamma(t))$ e $\gamma'(t)$

$(\vec{n}(P) =$ normale uscente da Ω in $P \in \partial\Omega)$

(se $\Omega = \{G \leq 0\}$ allora $P \in \partial\Omega \Leftrightarrow G(P) = 0$ e $\vec{n}(P) = \dfrac{\nabla G(P)}{\|\nabla G(P)\|}$)



si possono ottenere da $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ mediante una rotazione (una matrice unitaria di determinante 1)

cioè trovo una rotazione R del piano t.c. $\vec{n} = R\hat{e}_1$ $\gamma' = R\hat{e}_2$

Veniamo all'orientazione di $\Sigma(S)$

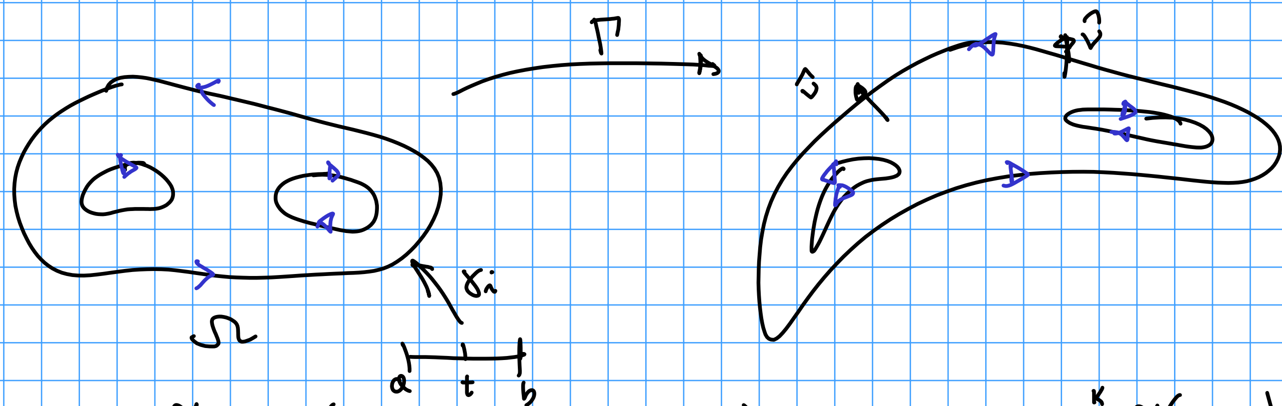
Def. Sia $(S, \hat{\nu})$ una sup. par. orientata. Sup

$\Gamma : \overline{\Omega} \to S$ una parametrizzazione concorde con $\hat{\nu}$

Ricordiamo che $\Sigma(S) = \Gamma(\partial\Omega)$ (non dipende dalla param.)

Se $\gamma_0 \dots \gamma_k$ sono le curve dette prima, posso considerare

$\tilde{\gamma}_0 \dots \tilde{\gamma}_k : [a,b] \to S$ definite da $\tilde{\gamma}_i(t) = \Gamma(\gamma_i(t))$



- È chiaro che $\tilde{\gamma}_0 \dots \tilde{\gamma}_k$ descrivono $\Sigma(S)$ cioè $\Sigma(S) = \bigcup_{i=0}^{k} \tilde{\gamma}_i([a,b])$
- QUESTE $\tilde{\gamma}_i$ INDUCONO SU $\Sigma(S)$ IL VERSO COERENTE con $\hat{\nu}$

QUESTO SIGNIFICA che se Γ_1 è un'altra parametrizzazione di S che va d'accordo con $\hat{\nu}$ (con un altro Ω e altre $\gamma_i \dots$) allora trovo $\hat{\gamma}_{01} \dots \hat{\gamma}_{k1}$ che descrivono $\Sigma(S)$ e si HA:

$$\hat{\gamma}_i'(t) = \lambda \hat{\gamma}_{j1}'(t_1) \qquad \lambda > 0$$

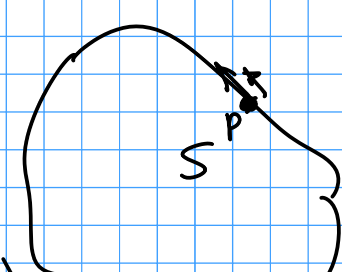
se $\hat{\gamma}_i(t) = \hat{\gamma}_{j1}(t_1)$

(se mi metto in un punto $P \in \Sigma(S)$

allora per P passa una $\hat{\gamma}_i$:

$P = \hat{\gamma}_i(t_P)$

e passa anche $\hat{\gamma}_{j1}$: $P = \hat{\gamma}_{j1}(t_{P1})$

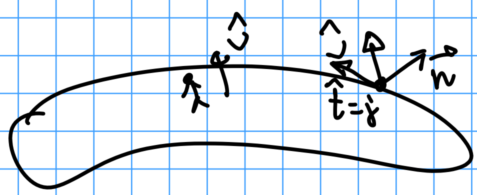


Allora $\hat{\gamma}_i'(t_P) = \lambda \hat{\gamma}_{j1}'(t_{P1})$ con $\lambda > 0$

GEOMETRICAMENTE :

Si percorre $\Sigma(s)$, con la testa verso la normale $\hat{\nu}$

<u>tengo S a sinistra</u>



- Se su S inverto la normale $\hat{\nu}$ $\Rightarrow$ i versi delle curve così costruite si invertono anche loro