Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 59 02/05/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Integrali di superficie di I^e specie:

$$\iint_\Gamma f \, d\sigma := \iint_\Omega f(\Gamma(u,v)) \, \|\vec{N}_\Gamma(u,v)\| \, du \, dv$$

Se poi S è "parametrizzabile", cioè se $S = \Gamma(\bar{\Omega})$ per un Γ come detto.. $\Rightarrow$ vorrei definire

$$\iint_S f \, d\sigma \left(= \iint_\Gamma f \, d\sigma \right)$$

Per questo devo dimostrare che se Γ e Γ_1 sono due parametrizzazioni per S $\Rightarrow$ $\iint_{\Gamma_1} f \, d\sigma = \iint_\Gamma f \, ds$

Vediamo alcuni fatti preliminari

<u>FATTO</u> Supponiamo che $\Gamma : \vec{\Omega} \to S$ parametrizzazione
$\Phi : \overline{\Omega_1} \to \overline{\Omega}$ sia continua su $\bar{\Omega}_1$, C^1 su Ω

bigettivo e $\Phi^{-1} : \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}_1$ con le stesse proprietà.

· Chiamiamo $\Gamma_1 = \Gamma \circ \phi$

$$\begin{tikzcd}
(u,v) \in \bar{\Omega} \arrow[dr, "\Gamma"] & & \bar{\Omega}_1 \ni (u_1,v_1) \arrow[ll, "\phi"'] \arrow[dl, "\Gamma_1"'] \\
& \mathbb{R}^3 &
\end{tikzcd}$$

$\vec{N}_{\Gamma_1} = ??$

Si ha

I° colonna di J_{Γ_1} II° colonna

$$\vec{N}_{\Gamma_1} = \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1} \otimes \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1} = \frac{\partial(\Gamma \circ \phi)}{\partial u_1} \otimes \frac{\partial(\Gamma \circ \phi)}{\partial v_1} =$$

Notiamo che $J_{\Gamma_1} = J_{\Gamma \circ \phi} = (J_\Gamma \circ \phi) \cdot J_\phi$

Mettiamo che $J_\phi = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$J_{\Gamma_1} = \underbrace{\left[\frac{\partial \Gamma}{\partial u} \circ \phi \;\middle|\; \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \circ \phi \right]}_{J_\Gamma \circ \phi} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

$3 \times 2 \qquad 2 \times 2 \quad \to \quad 3 \times 2$

$$\left[\underbrace{a \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \circ \phi + c \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \circ \phi}_{\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1}} \;\middle|\; \underbrace{b \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \circ \phi + d \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \circ \phi}_{\frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1}} \right]$$

$$\vec{N}_{\Gamma_1} = \left(a \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \circ \phi + c \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \circ \phi \right) \otimes \left(b \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \circ \phi + d \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \circ \phi \right) =$$

$$ad \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u} \circ \phi \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \circ \phi \right) + cb \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial v} \circ \phi \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \circ \phi \right) =$$

$$ad\, \vec{N}_\Gamma \circ \phi - cb\, \vec{N}_\Gamma \circ \phi = \det J_\phi \, \vec{N}_\Gamma \circ \phi$$

$$\boxed{\vec{N}_{\Gamma_1}(u,v) = \det J_\phi(u,v)\, \vec{N}_\Gamma(\Gamma(u,v))}$$

TEOR (INVARIANZA DI $\iint$, al variare della parametrizzazione)

$f: S \to \mathbb{R}$ continua

Se Γ e Γ_1 sono come sopra $\Rightarrow$

$$\iint_{\Gamma} f \, d\sigma = \iint_{\Gamma_1} f \, d\sigma$$

Dim. $\iint_{\Gamma_1} f \, d\sigma = \iint_{\Omega_1} f(\Gamma_1(u_1,v_1)) \, \|\vec{N}_{\Gamma_1}(u_1,v_1)\| \, du_1 dv_1 =$

$$\iint_{\Omega_1} f(\Gamma(\overbrace{\phi(u_1,v_1)}^{(u,v)})) \, |\det \phi(u_1,v_1)| \, \|\vec{N}_{\Gamma}(\overbrace{\phi(u_1,v_1)}^{(u,v)})\| \, du_1 dv_1 =$$

CAMBIO DI VARIABILE $(u,v) = \phi(u_1,v_1)$

$$\iint_{\Omega} f(\Gamma(u,v)) \, \|\vec{N}_{\Gamma}(u,v)\| \, du \, dv = \iint_{\Gamma} f \, d\sigma$$

DUNQUE HA SENSO $\iint_S f \, d\sigma$

(ogni volta che $S = \Gamma(\bar{\Omega})$ per una parametrizzazione Γ ...)

Ricordo che $\text{Area}(S) = \iint_S 1 \, d\sigma = \iint_{\Gamma} \|\vec{N}_{\Gamma}(u,v)\| \, du \, dv$

se Γ è una param. per S.

ESEMPI $S = \{x^2+y^2+z^2 = 1, \ z \geq 0\}$

Posso parametrizzare S con $\Gamma(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$

con $(u,v) \in B = \{u^2+v^2 \leq 1\}$. Ricordiamo che

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{N}_P = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|\vec{N}_P\| = \sqrt{1 + \frac{u^2}{1-u^2-v^2} + \frac{v^2}{1-u^2-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$$

$$\Rightarrow \text{AREA}(S) = \iint_B \frac{du\,dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}} = \left(\text{coord. polari } \begin{matrix} u = \rho\cos\theta \\ v = \rho\sin\theta \end{matrix}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = 2\pi \int_0^1 \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \qquad 1-\rho^2 = s \quad ds = -2\rho\,d\rho$$

$$-\pi \int_1^0 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \pi \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \pi \left[2\sqrt{s}\right]_0^1 = 2\pi$$

ALTRO ES. Stesso S. Voglio calcolare

$$\iint_S z\,d\sigma \qquad \left(\text{cioè } \iint_S f\,d\sigma \text{ dove } f(x,y,z) = z\right)$$

Stessi calcoli, usando lo T di prima:

$$\iint_S z\,d\sigma = \iint_B \sqrt{1-u^2-v^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\,du\,dv = \iint_B du\,dv$$

$$= \text{coord. pol.} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho\,d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = \pi$$

DEF. Se S è una sup. par. chiamo "centro di S" il vettore

$$\frac{1}{A(S)} \left(\iint_S x\,d\sigma, \iint_S y\,d\sigma, \iint_S z\,d\sigma \right) \left(= \iint_S (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\,d\sigma \right)$$

Nel caso sopra $S = \{x^2+y^2+z^2=1,\ z \geq 0\}$ allora

$$\frac{1}{2\pi}\left(0,\ 0,\ \pi\right)$$

(è facile vedere che i primi due integrali sono nulli

$$= (0,\ 0,\ 1/2)$$

Analogamente se $d(x,y,z)$ è la "densità" in $(x,y,z) \in S$

$\Rightarrow$ massa di S $\quad m(S) := \iint_S d \, d\sigma$

BARICENTRO $= \dfrac{1}{m(S)}\left(\iint_S x\, d\, d\sigma\ ,\ \iint_S y\, d\, d\sigma\ ,\ \iint_S z\, d\, d\sigma\right)$

(INTEGRALE DI II° SPECIE : FLUSSO)

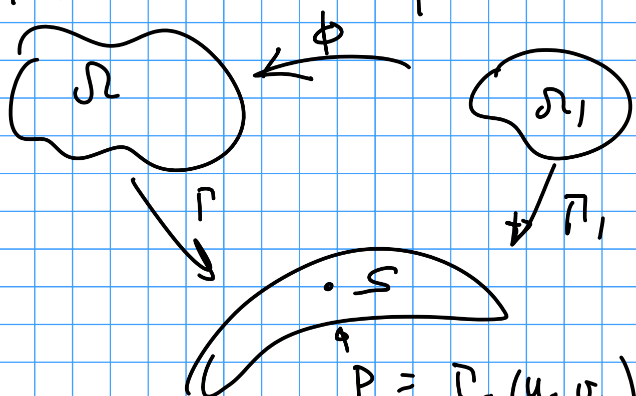
PRIMA BISOGNA PARLARE DI "VERSO" della normale.

VISTO che se S è una sup. par. ogni parametrizzazione Γ mantiene il piano tangente e la retta normale.

MA NON mantiene il VERSO della NORMALE.

In effetti abbiamo appena visto che

$$\vec{N}_{\Gamma_1}(u_1,v_1) = \det J_\phi(u_1,v_1)\ \vec{N}_\Gamma(\phi(u_1,v_1))$$



$P = \Gamma_1(u_1,v_1) = \Gamma(u,v)$

Questa formula mostra che

$\vec{N}_{\Gamma_1}(u_1,v_1)$ è concorde con $\vec{N}_{\Gamma}(u,v)$ se $\det J_\phi(u_1,v_1) > 0$

è discorde se $\det J_\phi(u_1,v_1) < 0$

Dalle ipotesi fatte su $\phi \Rightarrow \det J_\phi \neq 0$ NE SEGUE che

$\det J_\phi(u_1,v_1) > 0$ per ogni $(u_1,v_1) \in \Omega_1$

oppure $\det J_\phi(u_1,v_1) < 0$ per ogni $(u_1,v_1) \in \Omega_1$

Ω_1 CONNESSO LO SUPPONIAMO!!

DUNQUE POSSO DIRE CHE Γ e Γ_1 sono "concordi" se $\Gamma_1 = \Gamma \circ \phi$ con $\det J_\phi > 0$ / discordi se $\det J_\phi < 0$

IN QUESTO MODO L'INSIEME DI TUTTE LE PARAMETRIZZAZIONI SI DIVIDE IN DUE SOTTOINSIEMI (Ω / Ω_1 connessi!)

DEF. Chiamo <u>Superficie ORIENTATA</u> parametrizzabile una coppia $(S, \hat{\nu})$ dove S è una sup. par. e $\hat{\nu} : S \to \mathbb{R}^3$ tale che $\hat{\nu}$ è continua, $\|\hat{\nu}\| = 1$ e $\hat{\nu}(P)$ è normale a S in P ($\hat{\nu}(P) \in N_P(S)$)

$\hat{\nu}$ è un campo continuo di vettori normali unitari

La scelta di $\hat{\nu}$ corrisponde a scegliere una tra le due classi di parametrizzazioni dette prima, cioè le parametrizzazioni Γ tali che

$$(*) \quad \frac{\vec{N}_{\Gamma}(u,v)}{\|\vec{N}_{\Gamma}(u,v)\|} = \hat{\nu}\left(\Gamma(u,v)\right)$$

(sempre S connesso $\Leftrightarrow$ Ω connesso)

Dirò che, dato $(S,\hat{\nu})$, una Γ è concorde con $\hat{\nu}$ se vale la $(*)$; dirò che Γ è discorde con $\hat{\nu}$ se vale $\frac{\vec{N}_{\Gamma}}{\|\vec{N}_{\Gamma}\|} = -\hat{\nu}$

DEF. Sia $(S,\hat{\nu})$ una sup orientata, $\vec{g} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo di vettori continuo tale che $\|\vec{g}\|$ sia integrabile su S $\left(\iint_S \|\vec{g}\| \, d\sigma < +\infty \right)$. Chiamo

FLUSSO DI $\vec{g}$ attraverso $(S,\hat{\nu})$ il numero

$$\boxed{\Phi(\vec{g}, S, \hat{\nu}) := \iint_S \left(\vec{g} \cdot \hat{\nu}\right) d\sigma} =$$

← INT. DI I° SPECIE

(se Γ è una parametrizzazione)

$$\iint_\Omega \vec{g}\left(\Gamma(u,v)\right) \cdot \hat{\nu}\left(\Gamma(u,v)\right) \|\vec{N}_{\Gamma}(u,v)\| \, du \, dv$$

$\left(\text{SE } \Gamma \text{ è concorde} \Rightarrow \hat{\nu}\left(\Gamma(u,v)\right) = \frac{\vec{N}_{\Gamma}(u,v)}{\|\vec{N}_{\Gamma}(u,v)\|} \right) \rightarrow$

$$= \boxed{\iint_\Omega \vec{g}\left(\Gamma(u,v)\right) \cdot \vec{N}_{\Gamma}(u,v) \, du \, dv}$$

SCEGLIENDO Γ CONCORDE con $\hat{\nu}$!!

$$\left(= -\iint_\Omega \vec{g}\left(\Gamma(u,v)\right) \cdot \vec{N}_{\Gamma}(u,v) \, du \, dv \quad \text{se } \Gamma \text{ è discorde con } \hat{\nu} \right)$$

Si vede facilmente che il risultato non dipende da Γ (purché concorde)

ESEMPIO $\quad S = \{x^2+y^2+z^2=1 \,,\, z\geq 0\}$

$$\vec{f}(x,y,z) = \vec{k} \quad \left(= (0,0,1)\right)$$

CHE $\hat{\nu}$ considero?? $\qquad$ Per esempio $\hat{\nu}(x,y,z) = (x,y,z)$

(si vede che $\hat{\nu}$ è un campo di versori normali a S: prendo Γ come prima: $\Gamma(u,v) = (u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})$ $\qquad$ VERIFICA!

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|\vec{N}\| = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$$

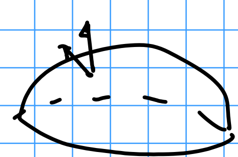
$$\Rightarrow \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \sqrt{1-u^2-v^2}\,\vec{N} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1-u^2-v^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

DUNQUE $\hat{\nu}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ è un campo di versori normali a S (è "un'orientazione") e $\Gamma(u,v) = (u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})$ è una parametrizzazione concorde con $\hat{\nu}$

$(B = \{u^2+v^2<1\})$

$$\Phi(\vec{k}, S, \hat{\nu}) = \iint_S (\vec{k}\cdot\hat{\nu})\, d\sigma =$$

$$\iint_B \vec{k}\cdot\vec{N}_\Gamma(u,v)\, du\, dv = \iint_{u^2+v^2\leq 1} 1 \, du\, dv = \pi$$



ALTRO ESEMPIO: $\quad \vec{f}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$

$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) =$ $\qquad$ (stessa parametrizzazione)

$$\iint_B \left(u^2\vec{i} + v^2\vec{j} + (1-u^2-v^2)\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\vec{i} + \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\vec{j} + \vec{k}\right) du\, dv$$

$$\iint_B \left(\frac{u^3+v^3}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right) + \left(1-u^2-v^2\right) du\, dv \quad = \quad \text{coordinate polari}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\, d\rho \left(\frac{\rho^3\cos^3(\theta)+\rho^3\sin^3(\theta)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + |B| - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\, d\rho\, \rho^2 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)\right) d\theta \int_0^1 \frac{\rho^4}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho + \underbrace{\pi - 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1}_{\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}}$$

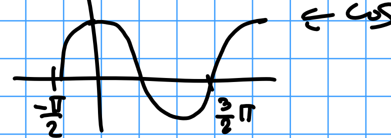
già qui vedo che viene zero per simmetria

Il primo integrale fa zero per motivi di "simmetria"

$$\int_0^{2\pi} \cos^3(\theta)\, d\theta =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos^3(\theta)\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\theta)\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos^3(\theta)\, d\theta =$$

$$\theta = \varphi + \pi \qquad d\theta = d\varphi$$



$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\theta)\, d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi+\pi)^3\, d\varphi =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\theta)\, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\varphi)\, d\varphi = 0$$

(Per il seno si prova in modo simile $\int_0^{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi}$ ← sin è dispari)

ALLA FINE (salvo errori...) il flusso viene $\frac{\pi}{2}$

OSS. IN TUTTI I DISCORSI CON GLI INTEGRALI

Le coordinate sferiche vanno benissimo, anche se non sono una "vera" parametrizzazione

LO SI PUÒ DIM. perché i punti in cui non c'è l'iniettività zero "trascurabili"

$$S = (z = x^2 - y^2 \ , \ x^2+y^2 \le 1 \}$$

grafico di $g(x,y) = x^2 - y^2$ su $B = \{x^2+y^2 \le 1\}$

Posso usare $\Gamma(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$:

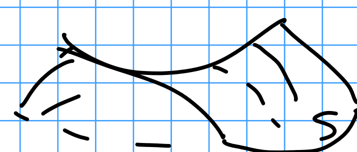
$$\vec{N}_\Gamma(u,v) = \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|\vec{N}_\Gamma\| = \sqrt{1+u^2+v^2} \neq 0$$

Mettiamo su S il versore normale

$$\hat{\nu}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \left(-x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k} \right)$$

Proviamo a fare

$$\Phi\big(\underbrace{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}_{\vec{f}(x,y,z)}, S, \hat{\nu} \big)$$



USO LA FORMULA

$$\longrightarrow \iint_B \vec{f}(u, v, u^2-v^2) \cdot \vec{N}_\Gamma(u,v) \, du \, dv =$$

$$\iint_B \left(u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2-v^2)\vec{k} \right) \left(-2u\vec{i} + 2v\vec{j} + \vec{k} \right) du\,dv$$

$$\iint_B \left(-2u^2 + 2v^2 + (u^2-v^2) \right) du\,dv = \iint_B (u^2+v^2)\,du\,dv \ .$$

(verrà zero per simmetria ...)

VEDIAMO DOMANI