Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 58 26/04/2023

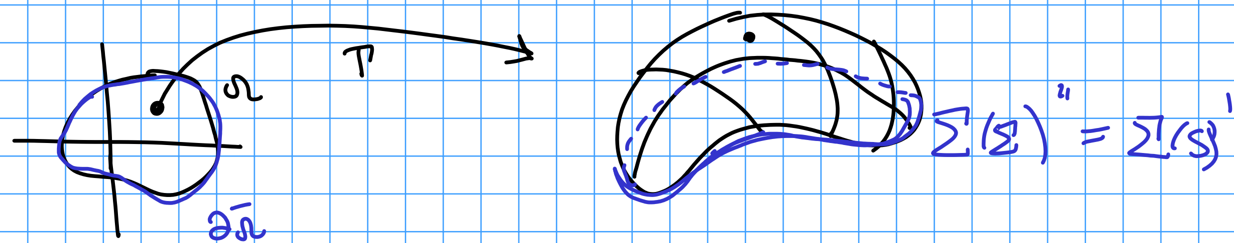
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

SUPERFICI PARAMETRICHE / PARAMETRIZZABILI

$\overline{\Omega} \in \mathbb{R}$ $\qquad \Gamma : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ $\qquad$ + IPOTESI

$S = \Gamma(\overline{\Omega})$



Dato una superficie Γ sono definiti:

- il sostegno $S = \Gamma(\overline{\Omega})$
- il bordo $\Sigma(S) = \Gamma(\partial\Omega)$
- piano tangente e retta normale nei punti $(u,v) \in \Omega$ / $P \in S \setminus \Sigma(\Omega)$

Alla fine si definisce "superficie" un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^3$ tale che esista una Γ con le proprietà dette, tale che $\Gamma(\overline{\Omega}) = S$

A causa dei risultati visti ho senso parlare di

$$\Sigma(S) \quad e \quad T_S(P) \;/\; N_S(P) \quad \text{per}: P \in S \setminus \Sigma(S)$$

<u>ESEMPIO</u> $S = \{x^2+y^2+z^2 = 1, \; z \geq 0\}$ Abbiamo visto che

$S =$ grafico di $g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ su $D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$

$\Rightarrow \quad \Sigma(S) = \{x^2+y^2 = 1, \; z = 0\}$

. Si possono definire retta normale e piano tangente:

$P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \; \frac{1}{\sqrt{3}} \; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. $\quad P_0 \in S \; \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1\right)$

$\frac{1}{\sqrt{3}} \geq 0$

$P_0 \notin \Sigma(S) \quad \left(z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0\right)$ Dunque esistono $T_{P_0}(S)$ e $N_{P_0}(S)$

Per trovarli devo usare una parametrizzazione, per esempio

$\Gamma(u,v) = (u, v, \underbrace{\sqrt{1-x^2-y^2}}_{g(x,y)})$ su $\bar{\Omega} = \{x^2+y^2 \leq 1\}$

$\Omega = \{x^2+y^2 < 1\}$

Già visto che $\vec{N}_\Gamma(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial u} g \\ -\frac{\partial}{\partial v} g \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$

Mi serve ora trovare u_0, v_0 tali che $\Gamma(u_0, v_0) = P_0$. È ovvio che

$\boxed{u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}}$ $\quad \left(x_0 = u_0, \; y_0 = v_0, \; z_0 = g(u_0, v_0) \; . \; . = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

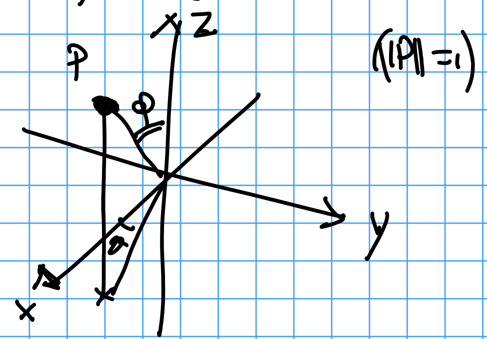
Allora $\vec{N}_\Gamma(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{1/\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}} \\ \frac{1/\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Ne segue

$N_S(P_0) = \left\{ \lambda(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \; \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$T_S(P_0) = \{ v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 K : \quad v_1 + v_2 + v_3 = 0 \}$ #

OSS. È opportuno usare su $S = \{x^2+y^2+z^2=1\}$ le coordinate sferiche

$$\Gamma(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix}$$



Γ purtroppo non rispetta le ipotesi

Γ NON È INIETTIVA !! Se considero $S = \{x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0\}$

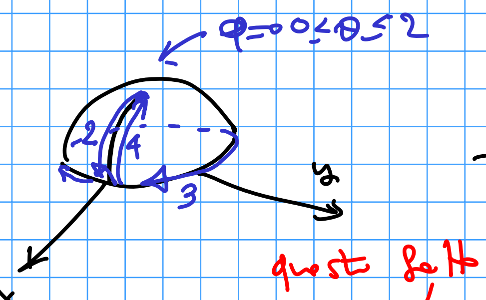
devo prendere $0 \leq \theta \leq 2\pi$ $\quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2$

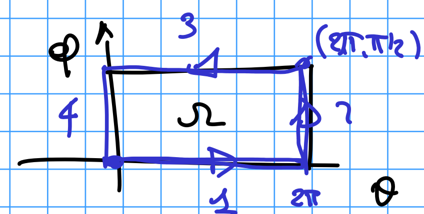
($\boxed{\Omega} = \{0<\theta<2\pi, \ 0<\varphi<\pi/2\} \to \bar{\Omega} =$)

Come ben noto il punto $(0,0,1)$ ha infiniti θ $\quad \varphi = 0$

Inoltre i punti $(x,0,z)$ con $x>0$ si ottengono con

$\theta = 0, \ \theta = 2\pi$





Γ È iniettiva su Ω — questo fatto può far credere

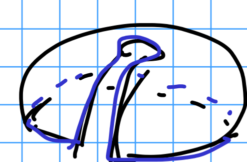
ma usare le coordinate sferiche crea dei problemi

CHI SAREBBE $\Sigma(S)$ se usassi le coord. sferiche

$$\text{“}\Sigma(S)\text{”} = \Gamma(\partial\Omega) = \Gamma\left(\text{lati del rettangolo } [0,2\pi]\times[0,\pi/2]\right)$$

Si vede dal disegno sopra che $\Sigma(S)$ avrebbe anche l'arco tra $(0,0,1)$ e $(1,0,0)$ (che viene percorso due volte una in un verso e una nell'altro ...)

Se invece partissi da uno S fatto così :



$\Rightarrow$ le coordinate sferiche andrebbero bene

Altro difetto delle coordinate sferiche: $\vec{N}(\text{Polo nord}) = \vec{0}$

In effetti: $\|\vec{N}(\vartheta,\varphi)\| = \sin\varphi$ Infatti

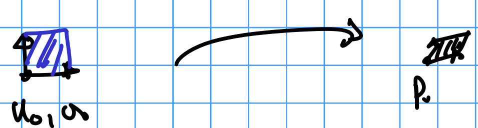
$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\vartheta} = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ \cos\vartheta\,\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\,\cos\varphi \\ \sin\vartheta\,\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{N}_\Gamma(\vartheta,\varphi) = \det\begin{bmatrix} i & -\sin\vartheta\,\sin\varphi & \cos\vartheta\,\cos\varphi \\ j & \cos\vartheta\,\sin\varphi & \sin\vartheta\,\cos\varphi \\ k & 0 & -\sin\varphi \end{bmatrix} =$$

$$\sin\varphi\,\det\begin{bmatrix} i & -\sin\vartheta & \cos\vartheta\,\cos\varphi \\ j & \cos\vartheta & \sin\vartheta\,\cos\varphi \\ k & 0 & -\sin\varphi \end{bmatrix} =$$

$$\sin\varphi\begin{pmatrix} -\cos\vartheta\,\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \left(= -\sin\varphi\;\Gamma(\vartheta,\varphi)\right)$$

OSS. $\|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|$ è l'area del "parallelogramma infinitesimale" determinato da $\frac{\partial\Gamma}{\partial u}$ $\frac{\partial\Gamma}{\partial v}$



$$\|\vec{N}\| \simeq \frac{\text{AREA NERA}}{\text{AREA BLU}}$$

(se AREA BLU $\to 0$)

Nel caso delle coordinate sferiche

DEF (INTEGRALI SUPERFICIALI DI PRIMA SPECIE)

Sia data una sup. parametrica $\Gamma : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, $S := \Gamma(\bar{\Omega})$

Sia $f : S \to \mathbb{R}$ CONTINUA.

Definiamo l'integrale di f su Γ

$$\iint_\Gamma f \, d\sigma = \iint_\Omega f(\Gamma(u,v)) \underbrace{\|\vec{N}_P(u,v)\|}_{\text{è definito (continuo) solo su } \Omega} \, du \, dv$$

se $f \geq 0$ $(f \leq 0)$

Questo integrale esiste e può fare $+\infty$ (a causa di $\|\vec{N}_P\|$)

Se f non ha segno costante allora definisco l'integrale solo se è finito, imponendo che $\iint f^+ d\sigma$ e $\iint f^- d\sigma$ siano finiti

$$\iint_\Gamma f \, d\sigma = \iint_\Gamma f^+ \, d\sigma - \iint_\Gamma f^- \, d\sigma$$

In particolare se $f = 1$, chiamo Area (Γ) l'integrale

$$\iint_\Gamma 1 \, d\sigma = \iint_\Omega \|\vec{N}_p(u,v)\| \, du \, dv.$$