Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 57 24/04/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

ESEMPIO Consideriamo:

$$\vec{f}(x,y,z) = e^{xy}\left(xz\,\vec{i} - yz\,\vec{j} + (y^2-x^2)\,\vec{k}\right)$$

Mi chiedo se $\exists\, \vec{F} : \vec{\nabla}\otimes\vec{F} = \vec{f}$.

Vediamo se $\vec{f}$ è solenoidale.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} xz e^{xy} = z e^{xy} + xyz\, e^{xy} \\
\frac{\partial f_2}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-yz e^{xy}\right) = -z e^{xy} - xyz\, e^{xy}
\end{aligned}\right\} \operatorname{div} \vec{f} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(y^2-x^2\right)e^{xy} = 0$$

Devo trovare $\vec{F} = F_1\,\vec{i} + F_2\,\vec{j} + F_3\,\vec{k}$ con $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{f}$

CERCO $\vec{F}$ CON $F_3 = 0$ IMPONGO DUNQUE

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & D_x & F_1 \\ \vec{j} & D_y & F_2 \\ \vec{k} & D_z & 0 \end{bmatrix} = -\vec{i}\, D_z F_2 + \vec{j}\, D_z F_1 + \vec{k}\left(D_x F_2 - D_y F_1\right)$$

da cui (1) $D_z F_2(x,y,z) = -f_1 = -xz e^{xy}$

(2) $D_z F_1(x,y,z) = f_2 = -yz e^{xy}$

(3) $D_x F_2 - D_y F_1 = (y^2 - x^2) e^{xy}$

$$(1) \Rightarrow \quad F_2 = -\int xz e^{xy}\, dz = \underbrace{-\frac{xz^2}{2} e^{xy} + c(x,y)}$$

$$(2) \Rightarrow \quad F_1 = -\int yz e^{xy}\, dz = -\frac{yz^2}{2} e^{xy} + d(x,y)$$

IMPONGO LA (3):

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{z^2}{2} e^{xy} - \frac{xyz^2}{2} e^{xy} + D_x c(x,y)$$

$$-\left(-\frac{z^2}{2} e^{xy} - \frac{xyz^2}{2} e^{xy} + D_y d(x,y)\right) =$$

$D_x c(x,y) - D_y d(x,y)$ ← DEVE FARE $(y^2 - x^2) e^{xy}$

$$D_x c - D_y d = (y^2 - x^2) e^{xy}$$

Possiamo fare così:

$D_x c = y^2 e^{xy}$ $\qquad$ $D_y d = x^2 e^{xy}$

$$c(x,y) = \int y^2 e^{xy}\, dx = y e^{xy} + c_1(y)$$

$$d(x,y) = \int x^2 e^{xy}\, dy = x e^{xy} + d_1(x)$$

⇒ Posso prendere

$$F_1(x,y) = -\frac{yz^2}{2} e^{xy} + x e^{xy} \quad (+ d_1(x))$$

$$F_2(x,y) = -\frac{xz^2}{2} e^{xy} + y e^{xy} \quad (+ c_1(y))$$

$$F_3(x,y) = 0$$

<u>DOMANDA</u> Se $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ sono potenziali vettori per $\vec{f}$, che

relazione c'è tra $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$. In altri termini se

$\vec{F}$ $(= \vec{F}_1 - \vec{F}_2)$ ha rotore nullo, cosa posso dire di $\vec{F}$??

Parte facile: se H è una funzione scalare $\Rightarrow$ ∇H ha rotore nullo $\quad \text{rot grad } H = 0 \quad (\forall H)$

Dunque se $\text{rot } \vec{F} = \vec{g}$ anche $\text{rot}(\vec{F} + \nabla H) = \vec{g}$

Il viceversa: se $\text{rot } \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \nabla H$ è vero se il dominio è semplicemente connesso.

DUNQUE se Ω è semplicemente connesso e $\vec{F}, \vec{g}$ sono due campi $\text{rot } \vec{F} = \vec{g}$ allora i potenziali vettori di $\vec{g}$ sono tutti del tipo $\vec{F} + \nabla H$ (al variare di H)

Se Ω è stellato e $\vec{g}$ è solenoidale $\Rightarrow$ esiste pot. vettore $\vec{F}$ $(\text{rot } \vec{F} = \vec{g})$ e i potenziali vettori sono tutti dati da F + campo conservativo.

Nell'esercizio di prima posso cercare un altro pot. vettore che abbia $F_2 = 0$ (invece che $F_3 = 0$)

$$F_1(x,y) = -\frac{yz^2}{2} e^{xy} + x e^{xy}$$

$$F_2(x,y) = -\frac{xz^2}{2} e^{xy} + y e^{xy}$$

$$F_3(x,y) = 0$$

Cerco un potenziale H tale che $\frac{\partial H}{\partial y} = -F_2$, cioè

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{xz^2}{2} e^{xy} - y e^{xy}$$

$$H = \frac{z^2}{2} e^{xy} - \int y\, e^{xy}\, dy =$$

$$\frac{z^2}{2} e^{xy} - \frac{y}{x} e^{xy} + \int \frac{1}{x} e^{xy}\, dy =$$

$$\frac{z^2}{2} e^{xy} - \frac{y}{x} e^{xy} + \frac{1}{x^2} e^{xy} + \text{cost}(x, z)$$

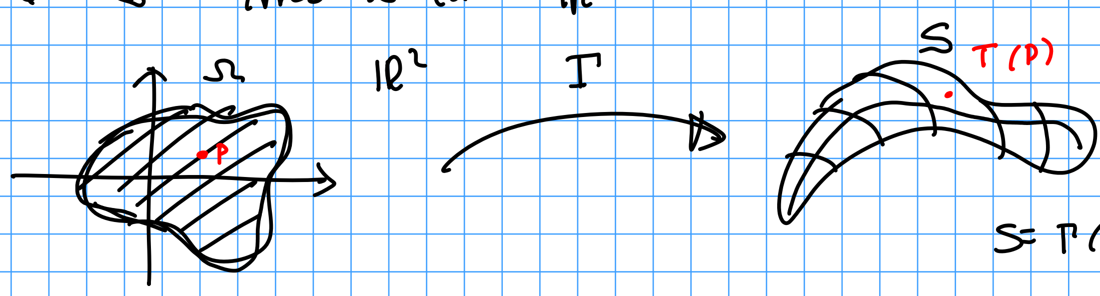
Trovato H in questo modo definisco il nuovo pot vett.

$$F_1 + \frac{\partial H}{\partial x} \qquad F_2 = 0 \qquad F_3 + \frac{\partial H}{\partial z}$$

SUPERFICI (E INTEGRALI DI SUPERFICIE)

(LAVORIAMO IN $\mathbb{R}^3$!!)

IDEA: PRENDO UN APERTO DI $\mathbb{R}^2$ e una funzione che lo manda in $\mathbb{R}^3$



$S = \Gamma(\bar{\Omega})$ = sostegno di Γ

Si può pensare che $S \subset \mathbb{R}^3$ sia individuata da una "mappa" $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e da Γ

SCRIVO IN MANIERA RIGOROSA QUESTA IDEA

DEF (SUPERFICI PARAMETRICA)

Supponiamo $\underbrace{\Omega \subset \mathbb{R}}$ sia un dominio regolare e fatto in $\mathbb{R}^2$

($\Omega = \{G_1 \leq 0, \dots G_k \leq 0\}$ con G_i C^1 + proprietà di trasversalità)

Supponiamo che $\underbrace{\Gamma : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3}$ sia continua su $\bar{\Omega}$

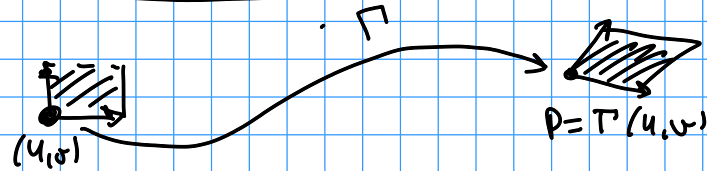
e di classe C^1 su Ω (se è $C^1(\bar{\Omega})$ tanto meglio!)

supponiamo anche che:

- Γ sia iniettiva  NO

- Per ogni $(u,v) \in \Omega$ $\quad \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v)$ e $\frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v)$ siano

linearmente indipendenti



Un modo alternativo di dire che $\frac{\partial \Gamma}{\partial u}$ e $\frac{\partial \Gamma}{\partial v}$ sono lin. ind.

è di chiedere che $\quad \vec{N}_\Gamma(u,v) := \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u,v) \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u,v) \neq 0$

Come noto $\vec{N}_\Gamma$ è un vettore perpendicolare a $\frac{\partial \Gamma}{\partial u}$ e a $\frac{\partial \Gamma}{\partial v}$

e $\|\vec{N}_\Gamma\|$ è l'area del parallelogramma di lati

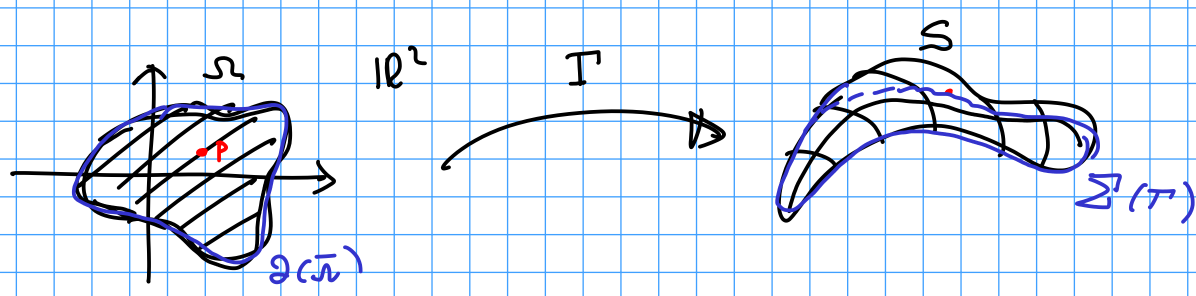
$\frac{\partial \Gamma}{\partial u}$ e $\frac{\partial \Gamma}{\partial v}$ #

A PARTIRE DA QUESTA DEFINIZIONE SI INTRODUCONO VARI CONCETTI

① Sostegno di Γ è l'insieme $S = \Gamma(\bar{\Omega})$. Cioè

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R} : \left(\exists\ (u,v) \in \bar{\Omega} : \ \Gamma(u,v) = (x,y,z) \right) \}$$

② Bordo di Γ è $\Sigma(\Gamma) := \Gamma(\partial \bar{\Omega})$



Nota $\Sigma(\Gamma)$ non è ∂S (in $\mathbb{R}^3$) (vediamolo su un esempio)

ESEMPIO $\quad \Omega : \{ u^2+v^2 < 1 \} \quad (\bar\Omega = \{u^2+v^2 \le 1\})$

e $\quad \Gamma(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}) \quad (\Gamma : \bar\Omega \to \mathbb{R}^3)$

Vediamo che $\Gamma : \bar\Omega \to \mathbb{R}^3$ è una sup. parametrica.

- Γ è continua su $\bar\Omega$ $\quad$ OK
- Γ è C^1 su $\Omega = \{u^2+v^2<1\}$ $\quad$ OK (la radice è C^1 se l'argomento della radice è >0)
- Γ è iniettiva se $(u_1,v_1) \neq (u_2,v_2)$

  sicuramente $(u_1, v_1, \sqrt{1-u_1^2-v_1^2}) \neq (u_2, v_2, \sqrt{1-u_2^2-v_2^2})$

- $$\vec N_\Gamma(u,v) = \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} \vec i & 1 & 0 \\ \vec j & 0 & 1 \\ \vec k & \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u/\sqrt{1-u^2-v^2} \\ v/\sqrt{1-u^2-v^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec N_\Gamma(u,v) = \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\vec i + \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\vec j + \vec k \neq 0$$

(ben definito in Ω)

$$\|\vec N_\Gamma(u,v)\| = \sqrt{\frac{u^2}{1-u^2-v^2} + \frac{v^2}{1-u^2-v^2} + 1} =$$

$$\sqrt{\frac{\cancel{u^2} + \cancel{v^2} + 1 - \cancel{u^2} - \cancel{v^2}}{1-u^2-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$$

DUNQUE Γ è una sup. parametrica.

- CHI È IL SOSTEGNO DI Γ ?? $\quad S = \Gamma(\bar\Omega)$

DICO CHE $\quad S = \{x^2+y^2+z^2 = 1, \ z \ge 0\}$

INFATTI se $(u,v)\in\overline{\Omega}$

$x = u \qquad y = v \qquad z = \sqrt{1-u^2-v^2}$

si vede subito che $x^2+y^2+z^2=1$ e che $z\geq 0$

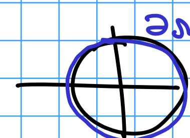
VICEVERSA se $x^2+y^2+z^2=1$ e $z\geq 0$ posso prendere $u=x$ $v=y$ e vedere che $\Gamma(u,v)=(x,y,z)$

DUNQUE $S=\{x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0\}$

• CHI È IL BORDO $\Sigma(\Gamma)$??

DICO CHE $\Sigma(\Gamma)=\{(x,y,z):\ x^2+y^2=1,\ z=0\}$

(l'equatore!).

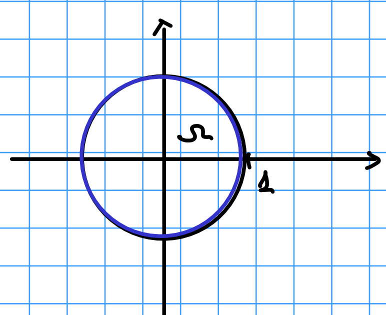


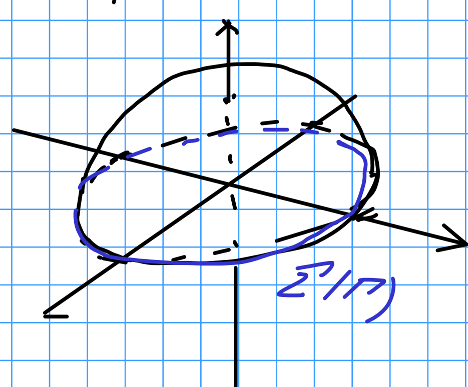
INTANTO è chiaro che $\partial\Omega=\{(u,v):\ u^2+v^2=1\}$

se $(x,y,z)=\Gamma(u,v)$ $\Rightarrow$ (per come è fatta Γ) $x^2+y^2=u^2+v^2=1$, $z=\sqrt{1-1}=0$

Questo dice $\Gamma(\partial\Omega)\subset\{x^2+y^2=1,\ z=0\}$

Viceversa se $x^2+y^2=1$ $z=0$, prendo $u=x$ $v=y\Rightarrow\Gamma(u,v)=(x,y,z)$





Questo esempio mostra un caso particolare di "SUPERFICIE CARTESIANA" o "GRAFICO".

<u>Def.</u> Supponiamo che $g:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ sia $C^0(\overline{\Omega})$ e $C^1(\Omega)$. Allora possiamo definire $\Gamma:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^3$ ponendo

$$\Gamma(u,v)=(u,v,g(u,v))$$

Si vede (ripetendo quanto fatto nell'esempio) che

- Γ è una sup. parametrica
- il sostegno di Γ è il grafico di g

INOLTRE si vede che

$$\vec{N}_\Gamma = -\frac{\partial g}{\partial u}\vec{i} - \frac{\partial g}{\partial v}\vec{j} + \vec{k}$$

$$\|\vec{N}_\Gamma\| = \sqrt{1 + \|\nabla g\|^2}$$

Infatti
$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & 1 & 0 \\ \vec{j} & 0 & 1 \\ \vec{k} & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix} =$$

(nell'esempio $g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$)

<u>OSS.</u> IL BORDO $\Sigma(\Gamma)$ non è ∂S (S = sostegno)

nell'esempio $S = \{x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$

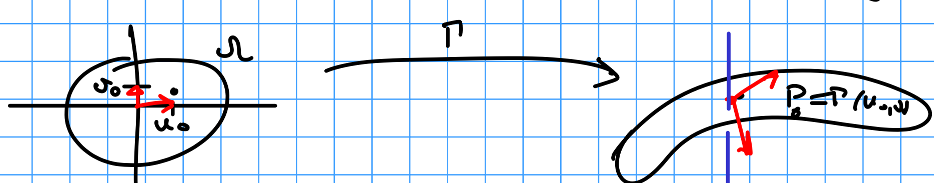
$\partial S = S$ (sè tutta frontiera S non ha parte interna)

LA NOZIONE DI "BORDO" HA BISOGNO DI Γ!

Def (PIANO TANGENTE E RETTA NORMALE)

Supp. Γ è una sup. parametrica $(u_0,v_0) \in \Omega$ (non nella $\partial\Omega$)

chiamo $P_0 = \Gamma(u_0,v_0)$ ($\in S$ = sostegno di Γ)



Chiamo Piano tangente a S in P_0 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u_0,v_0)$ e $\frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u_0,v_0)$

questo sottospazio ha dim 2, è un piano in $\mathbb{R}^3$ $\boxed{T_\Gamma(P_0)}$

Chiamo retta normale a S in P_0 la retta perpendicolare al piano tangente e cioè la retta $\{\lambda \vec{N}_\Gamma(u_0,v_0), \lambda \in \mathbb{R}\}$

$$\boxed{N_\Gamma(P_0)}$$

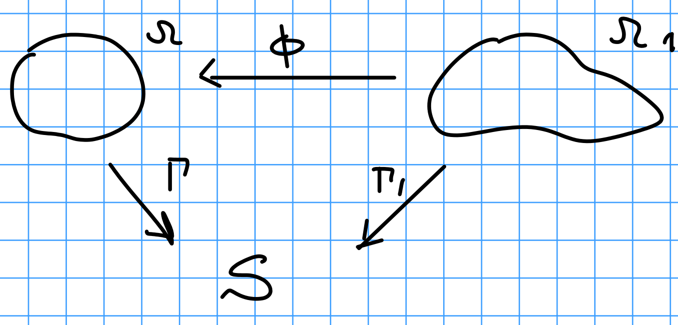
È chiaro che $\mathbb{R}^3 = T_\Gamma(P_0) \oplus N_\Gamma(P_0)$

PROBLEMA Come tutte queste definizioni dipendono da Γ (o solo da $S = \Gamma(\bar{\Omega})$??)

<u>DEF</u> (RIPARAMETRIZZAZIONE)

Date $\Gamma : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ e $\Gamma_1 : \bar{\Omega}_1 \to \mathbb{R}^3$ sup. parametriche

dico che Γ_1 è "una riparametrizzata di Γ" se esiste $\phi : \bar{\Omega}_1 \to \bar{\Omega}$, $C^0(\bar{\Omega})$, $C^1(\Omega)$, ϕ bigettiva e t.c.



$$\Gamma_1 = \Gamma \circ \phi$$

È chiaro che in questa situazione $\Gamma(\bar{\Omega}) = \Gamma_1(\bar{\Omega}_1) = S$

cioè sia Γ che Γ_1 hanno lo stesso sostegno

. Una tale ϕ si chiama "cambio di parametro" (che fa passare da Γ a Γ_1)

<u>TEOR.</u> - (a) Se ϕ è un cambio di parametro allora ϕ manda Ω_1 in Ω e $\partial\Omega_1$ in $\partial\Omega$

(b) Se Γ_1 e Γ sono due superfici parametriche con lo stesso sostegno $\Rightarrow$ esiste un cambio di parametri che fa passare da Γ a Γ_1 (Γ_1 è riparametrizzata di Γ)

NON LO DIMOSTRO ((a) E' DIFFICILE)

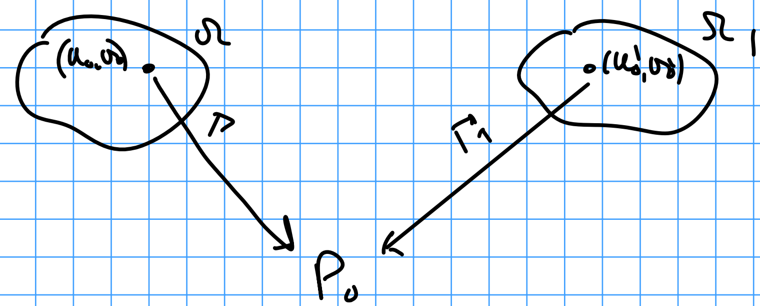
NE SEGUONO VARIE PROPRIETÀ

<u>PROP.</u> Supponiamo Γ sup. parametrica e Γ_1 una riparametrizzata di Γ. ALLORA

- Sostegno di Γ = Sostegno di Γ_1
- $\Sigma(\Gamma) = \Sigma(\Gamma_1)$
- $T_\Gamma(P_0) = T_{\Gamma_1}(P_0)$ se $P_0 \in \Sigma$ è lo stesso punto.

Più precisamente: se $P_0 = \Gamma(u_0, v_0)$ con $(u_0, v_0) \in \Omega$
$P_0 = \Gamma_1(u_0', v_0')$ con $(u_0', v_0') \in \Omega_1$

allora $\operatorname{span}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u_0,v_0)\right) = \operatorname{span}\left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_1}(u_0',v_0'), \frac{\partial \Gamma_1}{\partial v_1}(u_0',v_0')\right)$



- Per lo stesso motivo le rette normali coincidono cioè

$$P_0 = \Gamma(u_0, v_0) = \Gamma_1(u_0', v_0') \implies \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0 \text{ t.c.}$$

$$\vec{N}_\Gamma(u_0, v_0) = \lambda\, \vec{N}_{\Gamma_1}(u_0', v_0')$$

NON E' DETTO che $\lambda > 0$ – $\vec{N}_\Gamma(u_0,v_0)$ e $\vec{N}_{\Gamma_1}(u_0',v_0')$ NON SONO NECESSARIAMENTE CONCORDI

<u>DEF.</u> Dico che $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie

"parametrizzabile" se esistono $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}$ e $\Gamma : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ con le proprietà dette (Γ è una sup. parametriz) tale di

$$\Gamma(\bar{\Omega}) = S$$

Se ciò avviene dirò che Γ è una parametrizzazione per S.

#

DUNQUE posso dire che $S = \{ x^2+y^2+z^2=1 , z \geq 0 \}$ è una superficie parametrizzabile

Dalle proprietà viste sopra è chiaro che, se S è una sup. parametrizzabile, posso definire

- $\boxed{\Sigma(S)}$ (bordo di S) definito come $\Sigma(\Gamma)$ per una qualunque parametrizzazione di S

(se Γ_1 è un'altra parametrizzazione di $S \Rightarrow \Gamma_1 = \Gamma \circ \phi$, ϕ cambio di paramet. , $\Rightarrow \Sigma(\Gamma) = \Sigma(\Gamma_1)$)

- $\underset{\text{piano tangente a } S \text{ in } P_0}{T_S(P_0)}$ e $\underset{\text{retta tangente a } S \text{ in } P_0}{N_S(P_0)}$ per ogni $P_0 \in S \setminus \Sigma(S)$

prendendo $T_S(P_0) = T_\Gamma(u_0, v_0)$ dove Γ è una parametrizzazione e $(u_0, v_0) \in \Omega$ t.c. $P_0 = \Gamma(u_0, v_0)$ / lo stesso per $N_S(P_0)$

TORNANDO ALL'ESEMPIO $S = \{ x^2+y^2+z^2=1 , z \geq 0 \}$

Posso scrivere $\Sigma(S) = \{ x^2+y^2=1 , z=0 \}$ e posso scrivere: se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ con $z > 0$

allora $N_S(P_0) = \{ t(x_0, y_0, z_0) \quad t \in \mathbb{R} \}$

e $T_S(P_0) = \{ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} : \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = 0 \}$

Gli stessi risultati si possono ottenere mediante la parametrizzazione in "coordinate sferiche":

??

$$\Gamma_1 = \Gamma_1(\vartheta, \varphi) \qquad (\vartheta, \varphi) \in \;?!$$

LA PROSSIMA VOLTA NE PARLIAMO.

$$\Gamma_1(\vartheta, \varphi) = \cos\vartheta \sin\varphi \,\vec{i} + \sin\vartheta \sin\varphi \,\vec{j} + \cos\varphi \,\vec{k}$$