Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 56 19/04/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Ricordiamo (definiamo) i seguenti "OPERATORI" differenziali

SIAMO IN $N=3$ (o $N=2$). Definiamo:

- gradiente di f dove f è scalare

$$\text{grad } f = \nabla f \; (\vec{\nabla} f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$ (messo in colonna)

- divergenza di $\vec{f}$, $\vec{f}$ è un campo:

$$\text{div } \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

$$\text{"} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \text{"}$$

- rotore di $\vec{f}$, $\vec{f}$ è un campo:

$$\text{rot } \vec{f} = \vec{\nabla} \otimes \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} f_1 - \frac{\partial}{\partial x} f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial}{\partial y} f_1 \end{pmatrix}$$ (è un vettore)

"formalmente" $\text{rot}\,\vec{f} = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & D_x & f_1 \\ \vec{j} & D_y & f_2 \\ \vec{k} & D_z & f_3 \end{bmatrix}$

- GIA' VISTO CHE ($\vec{f}$ è C^1)

$$\vec{f} \text{ è conservativo} \Rightarrow \text{rot}\,\vec{f} = 0$$

($\vec{f}$ ammette potenziale)

ALTRO PROBLEMA:

dato un campo $\vec{f}$, C^0 su $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, mi chiedo se esiste un altro campo $\vec{F}$ C^1 su Ω tale che

$$\text{rot}\,\vec{F} = \vec{f}$$

Se questo è possibile dico che $\vec{F}$ è un "POTENZIALE VETTORE" per $\vec{f}$

CONDIZIONE NECESSARIA Sia $\vec{f}$ è C^1. Allora se esiste un potenziale vettore $\vec{F}$ per $\vec{f}$, necessariamente

$$\text{div}\,\vec{f} = 0$$

Infatti: se $\vec{f} = \vec{\nabla} \otimes \vec{F}$ allora

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot (\underbrace{\vec{\nabla} \otimes \vec{F}}_{\perp\, \nabla}) = 0 \;!!$$

Se si fanno i conti si vede che $\text{div}\,(\text{rot}\,\vec{F}) = 0$ qualunque sia $\vec{F}$. Formalmente la cosa si capisce se tratto $\vec{\nabla}$ come un vettore.

Def. Se $\vec{f}$ è un campo C^1 con $\text{div}\,\vec{f} = 0$ DICO che $\vec{f}$ è SOLENOIDALE.

DUNQUE se $\vec{f}$ è C^1

$\vec{f}$ AMMETTE POT. VETTORE $\Rightarrow$ $\vec{f}$ SOLENOIDALE

CI SI PUÒ CHIEDERE se vale $\Leftarrow$. LA RISPOSTA È NO.

<u>CONTROESEMPIO</u> $\vec{f}(P) = \dfrac{\hat{P}}{\|P\|^2} = \dfrac{P}{\|P\|^3}$ $\quad (P=(x,y,z))$

DICO CHE $\vec{f}$ è <u>solenoidale</u> in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x\cdot\frac{3}{\cancel{2}}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\,\cancel{2}x}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$= \frac{\|P\|^3 - 3\|P\|x^2}{\|P\|^6}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \dots \quad \frac{\|P\|^3 - 3\|P\|y^2}{\|P\|^6}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \dots \quad \frac{\|P\|^3 - 3\|P\|z^2}{\|P\|^6}$$

SOMMO $\rightarrow$ $\operatorname{div}\vec{f} = \dfrac{3\|P\|^3 - 3\|P\|(x^2+y^2+z^2)}{\|P\|^6} = \dfrac{3\|P\|^3 - 3\|P\|\|P\|^2}{\|P\|^6} = 0$

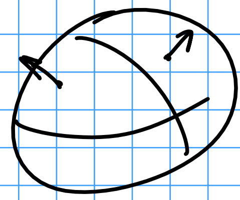
DICO CHE $\vec{f}$ NON AMMETTE POT. VETTORE.

NON SONO IN GRADO DI DIMOSTRARLO ORA.

VEDREMO che

<u>Fatto</u> Se S è una superficie chiusa allora il "flusso" di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso S è nullo

Nel caso sopra è abbastanza chiaro che se S = sfera di raggio $R>0$, il flusso di $\vec{f} > 0$ $(= 4\pi)$ dato che in ogni pt della sfera il campo è perpendicolare

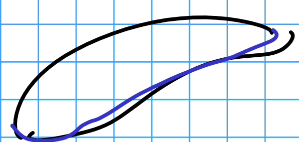


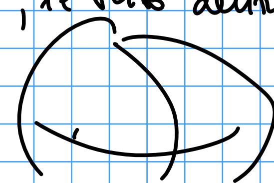
alla sfera

DUNQUE NON TUTTI I CAMPI SOLENOIDALI AMMETTONO POT. VETTORE

Perché valga la $\Leftarrow$ è necessario una proprietà di Ω che è una "semplice connessione di ordine 2":

$\approx$ OGNI SUPERFICIE CHIUSA (senza bordo) si può deformare a un punto, il tutto dentro Ω





$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ NON HA QUESTA PROPRIETÀ.

- Se Ω è stellato la proprietà vale. DUNQUE IN Ω stellato è <u>VERO</u> che ogni campo solenoidale ammette pot. vettore. (per esempio x $\Omega = \mathbb{R}^3$)

COME TROVO I POT. VETTORI

<u>ESEMPIO</u> Consideriamo:

$$\vec{g}(x,y,z) = e^{xy}\left(xz\,\vec{i} - yz\,\vec{j} + (y^2-x^2)\,\vec{k}\right)$$

Mi chiedo se $\exists\, \vec{F} : \vec{\nabla} \otimes \vec{F} = \vec{g}$.

Vediamo se $\vec{g}$ è solenoidale.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} xz e^{xy} = z e^{xy} + xyz e^{xy}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-yz e^{xy}\right) = -z e^{xy} - xyz e^{xy}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(y^2-x^2\right)e^{xy} = 0$$

$\Big\}$ $\operatorname{div} \vec{f} = 0$

Devo trovare $\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 k$ con $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{f}$

CERCO $\vec{F}$ CON $F_3 = 0$ IMPONGO DUNQUE

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & D_x & F_1 \\ \vec{j} & D_y & F_2 \\ \vec{k} & D_z & 0 \end{bmatrix} = -\vec{i}\, D_z F_2 + \vec{j}\, D_z F_1 + \vec{k}\left(D_x F_2 - D_y F_1\right)$$

da cui (1) $D_z F_2(x,y,z) = -f_1 = -xz e^{xy}$

(2) $D_z F_1(x,y,z) = f_2 = -yz e^{xy}$

(3) $D_x F_2 - D_y F_1 = (y^2-x^2)e^{xy}$

$$(1) \Rightarrow \quad F_2 = -\int xz e^{xy}\, dz = \underbrace{-\frac{xz^2}{2} e^{xy} + c(x,y)}$$

$$(2) \Rightarrow \quad F_1 = -\int yz e^{xy}\, dz = -\frac{yz^2}{2} e^{xy} + d(x,y)$$

IMPONGO LA (3):

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{z^2}{2}e^{xy} - \frac{xyz^2}{2} e^{xy} + D_x c(x,y) - \left(-\frac{z^2}{2} e^{xy} - \frac{xyz^2}{2} e^{xy} + D_y d(x,y)\right) =$$

$$D_x c(x,y) - D_y d(x,y) \leftarrow \text{DEVE FARE } (y^2-x^2)e^{xy}$$

Posso prendere $d = 0$ e c tale che

$$c(x,y) = \int (y^2-x^2)e^{xy}\, dx =$$

$$y e^{xy} \; . \; . \; . \; .$$

FINIAMO
LUNEDI