Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 55 18/04/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

RICEVIMENTO GIOVEDÌ 20 alle 17.30
MERCOLEDÌ 26 alle 15.00

SU TEAMS

LUNEDÌ 24 LEZIONE SU TEAMS

VISTO Se Ω è semplicemente connesso $\Rightarrow$ ogni campo irrotazionale è conservativo

PROP. Se Ω è stellato rispetto a un suo pto x_0 $\Rightarrow$ Ω è semplicemente connesso. DOVE:

Ω stellato rispetto a $x_0 \in \Omega$ significa che

$$\forall x \in \Omega \quad \forall t \in [0,1] \qquad x_0 + t(x - x_0) \in \Omega$$

(il segmento tra x_0 e x è tutto contenuto in Ω).

DIM Vediamo che se $\gamma:[a,b]\to\Omega$ è una curva chiusa in Ω esiste un'omotopia che "deforma" γ a x_0. Basta prendere

$$H(t,s) = x_0 + s(\gamma(t)-x_0) \quad !!$$

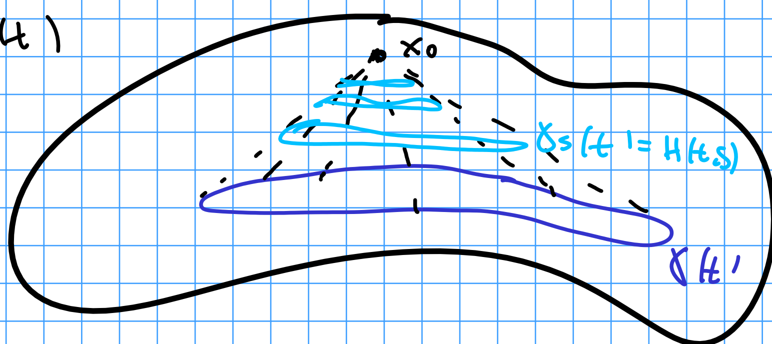
Vediamo che

(0) $H(t,s)\in\Omega \quad \forall t\in[0,b] \quad \forall s\in[0,1]$ (perché Ω è stellato rispetto a x_0)

(1) $H(t,s)$ è continua

(2) $H(t,0) = x_0$

(3) $H(t,1) = \gamma(t)$



Quindi $H(t,s)$ è un'omotopia tra $\gamma_0(t) = x_0$ e $\gamma_1(t) = \gamma(t)$

ESEMPIO

$$\vec{f}(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

NOTA CHE

$$\|\vec{f}\|^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{1}{\|(x,y,z)\|^2}$$

Mi chiedo se $\vec{f}$ è conservativo. Potrei vedere se $\vec{f}$ è irrotazionale (e domandarmi se $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ è semplicemente connesso). SI SA (anche se non è facile da dimostrare) che $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ È SEMPLICEMENTE CONNESSO - è chiaro che $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ non è stellato)

Vediamo se $\vec{f}$ è irrotazionale. Devo dimostrare che

(1) $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$, (2) $\dfrac{\partial f_1}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial x}$, (3) $\dfrac{\partial f_2}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial y}$

Vediamo la (1)

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = x\,\frac{-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\,2y}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = y\,\frac{-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\,2x}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

TORNA !! . La (2) e la (3) sono simili.

ALTRA POSSIBILITÀ: Vedo se trovo un potenziale $F(x,y,z)$ (definito su $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$), cioè una $F(x,y,z)$ tale che

$$(1)\ \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad (2)\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\quad (3)\ \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Vediamo la (1):

$$F(x,y,z) = \int \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dx \qquad t = x^2+y^2+z^2 \qquad dt = 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{1}{2}\int t^{-3/2}\,dt = \frac{1}{2}(-2)\,t^{-1/2} + \text{cost}$$

$$\Rightarrow F(x,y,z) = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + c_1(y,z)$$

Con lo stesso ragionamento

(da (2)) $$F(x,y,z) = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + c_2(x,z)$$

(da (3)) $$F(x,y,z) = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + c_3(x,y)$$

da tutto questo ottengo $c_1(y,z) = c_2(x,z) = c_3(x,y)$

Dico che se segue $c_1 = c_2 = c_3 \in \mathbb{R}$ (costanti).

DA $c_1(y,z) = c_2(x,z)$ ottengo c_1 NON DIPENDE DA y

e c_2 non dipende da x: $c_1 = c_1(z)$ $c_2 = c_2(z)$

Analogamente $c_2(x,z) = c_3(x,y) \Rightarrow c_2$ NON DIPENDE DA z e c_3 NON DIPENDE DA y e quindi

$$c_2 = c_2(x) \qquad c_3 = c_3(x)$$

DUNQUE RISCRIVO

$$c_1(z) = \underbrace{c_2(z) = c_2(x)}_{c_2 = \text{costante}} = c_3(x)$$

$\Rightarrow$ $c_1 = c_2 = c_3$ costanti.

DUNQUE HO DIMOSTRATO (direttamente) che $\vec{f}$ è conservativo e ho anche dimostrato che i potenziali di $\vec{f}$ sono tutti e soli della forma

$$F(x,y,z) = \frac{-1}{\|x,y,z\|} + \text{costante}$$

ammesso di aver fatto il primo ragionamento

ALTRA COSA CHE POTREI FARE per costruire un potenziale

FISSO UN PTO $P_0 =$ (per esempio) $(1,0,0)$ $\left(\|P_0\| = 1\right)$ e dato un generico $P = (x,y,z)$ costruire una curva $\gamma = \gamma_P$ che congiunge P_0 a P e fare l'integrale $\int_{\gamma_P} \vec{f} \cdot d\vec{s}$

Per costruire γ_P ragiono in due passi. INTRODUCO

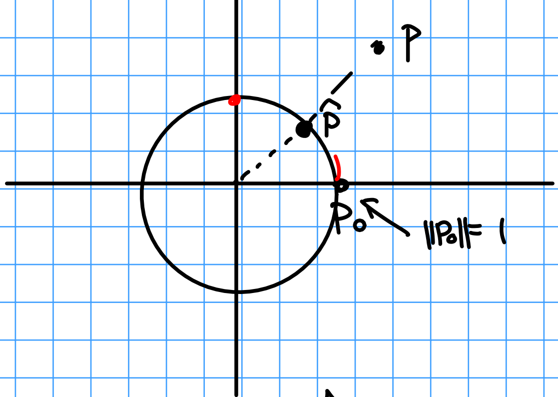
$$\hat{P} = \frac{P}{\|P\|}\|P_0\| = \frac{P}{\|P\|}. \text{ Ho che}$$

$$\left(\begin{array}{ll} \hat{P} = \hat{t}\,P & \text{dove } \hat{t} = \frac{\|P_0\|}{\|P\|} = \frac{1}{\|P\|} \quad \|\hat{P}\| = \|P_0\| = 1 \\ P = \frac{1}{\hat{t}}\,\hat{P} & \end{array}\right)$$

non è che questo serva molto

(1) prendo il segmento da P a $\hat{P}$ $\quad \underbrace{s(t) = P + t(\hat{P} - P) \quad 0 \le t \le 1}$

(se $\|P\| = 1$ il passo (1) non serve)



$S(t)$ si può scrivere più semplicemente come

$$S(t) = P + t\left(\frac{P}{\|P\|} - P\right) = P\left(1 + t\left(\frac{1}{\|P\|} - 1\right)\right)$$

da cui $S'(t) = \left(\frac{1}{\|P\|} - 1\right) P$

(se $\|P\| = 1$, $S(t)$ non serve)

(2) Congiungo $\hat{P}$ e P_0 su un arco di circonferenza

(se $\hat{P} = P_0$ il passo (2) non serve)

CI FIDIAMO CHE questo arco di circonferenza si trova (in realtà ce n'è più di uno)

Osserviamo che se $\gamma(t) \in$ sfera di raggio 1 $\Rightarrow$

$$\|\gamma(t)\|^2 = 1 \Rightarrow \gamma'(t) \cdot \gamma(t) = 0 \Rightarrow \gamma'(t) \perp \vec{g}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

DUNQUE in qualunque modo io vada da $\hat{P}$ a P_0 con una curva γ $\Rightarrow \int_\gamma \vec{g} \cdot d\vec{s} = 0$

Quindi se incollo il tratto da P a $\hat{P}$ e quello da $\hat{P}$ a P_0 l'unico contributo è dato dal tratto iniziale cioè

$$\int_0^1 \vec{g}(S(t)) \cdot S'(t)\, dt = \int_0^1 \frac{P\left(1 + t\left(\frac{1}{\|P\|} - 1\right)\right)}{\left\|P\left(1 + t\left(\frac{1}{\|P\|} - 1\right)\right)\right\|^3} \cdot \left(\frac{1}{\|P\|} - 1\right) P \, dt =$$

$$\int_0^1 \frac{\|P\|^2 \left(1 + t\left(\frac{1}{\|P\|} - 1\right)\right)}{\|P\|^3 \left|1 + t\left(\frac{1}{\|P\|} - 1\right)\right|^3} \left(\frac{1}{\|P\|} - 1\right) dt =$$

$$\frac{1}{\|P\|}\left(\frac{1}{\|P\|} - 1\right) \int_0^1 \frac{dt}{\left(1 + t\left(\frac{1}{\|P\|} - 1\right)\right)^2} =$$

(notiamo che $1 + t\left(\frac{1}{\|P\|} - 1\right)$ vale 1 per $t = 0$ e vale $\frac{1}{\|P\|}$ se $t = 1$. Essendo lineare non vale mai zero dunque è sempre > 0)

faccio la sostituzione $\tau = \left(\frac{1}{\|P\|} - 1\right) t$

$$\frac{1}{\|P\|}\int_0^{\frac{1}{\|P\|}-1}\frac{d\tau}{(1+\tau)^2} = -\frac{1}{\|P\|}\left[\frac{1}{1+\tau}\right]_0^{\frac{1}{\|P\|}-1} =$$

$$-\frac{1}{\|P\|}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\|P\|}-1} - \frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{\|P\|}\left(\|P\|-1\right) = -1 + \frac{1}{\|P\|}$$

HO UN SEGNO SBAGLIATO. IL MOTIVO È CHE PER COSTRUIRE IL POTENZIALE DOVEVO PRENDERE UNA CURVA DA P_0 a P mentre la costruzione fatta mi dà una curva da P a P_0!! Dunque dovrei scambiare P e P_0 nei conti sopra - oppure più semplicemente, dato che la curva opposta fa cambiare segno all'integrale, CAMBIO SEGNO AL RISULTATO. In definitiva ho trovato

$$F(P) = \frac{-1}{\|P\|} + 1$$

(che vale ZERO in P_0, anzi su tutti i punti di norma 1)

PIÙ IN GENERALE

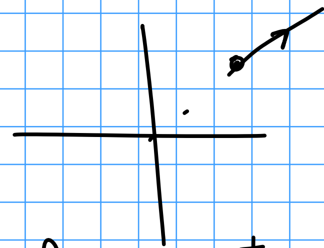
Def. Dico che $\vec{f}$ è un campo RADIALE se

$$\vec{f}(P) = \varphi(\|P\|^2)\,P$$

dove φ è una funzione scalare che può essere definita su $]r_1, r_2[$ oppure $[0, r]$ $\qquad r_1 > 0 \quad 0 < r_2 \le +\infty \;\; 0 < r \le \infty$

($\vec{f}$ risulta definita sulla "corona" $\{r_1 < \|P\| < r_2\}$ oppure su $\{\|P\| < r\}$ (r_2 e r possono essere $+\infty$))

DUNQUE $\|\vec{f}(P)\| = \varphi(\|P\|^2)$ è costante sulle sfere e $\vec{f}$ è diretto sulla "direzione radiale"



Se suppongo φ continua $\Rightarrow$ $\vec{f}$ è continua.

DICO CHE un campo radiale è <u>SEMPRE</u> conservativo (ANCHE IN $\mathbb{R}^2$ dove $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ NON È S.C.)

INFATTI se φ è continua posso prendere una primitiva Φ, cioè una funzione C^1 Φ tale che $\Phi' = \varphi$

Allora la funzione F definita da

$$F(P) = \frac{1}{2}\Phi(\|P\|^2)$$

è un potenziale per $\vec{f}$, dato che

$$\nabla F(P) = \frac{1}{2}\Phi'(\|P\|^2)\cdot\nabla\|P\|^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\varphi(\|P\|^2)\,\cancel{2}P = \vec{f}(P)$$

Per esempio il campo di prima è $\vec{f}(P) = \dfrac{P}{\|P\|^3}$

$= \varphi(\|P\|^2)\,P$ con $\varphi(s) = s^{-3/2}$

$$\left(\varphi(\|P\|^2) = \left(\|P\|^2\right)^{-3/2} = \|P\|^{-3}\right)$$

Da quanto detto trovo un potenziale prendendo $F(P) = \frac{1}{2}\Phi(\|P\|^2)$

dove $\Phi' = \varphi \iff \Phi(s) = \int s^{-3/2}\,ds = (-2)s^{-1/2}$

da cui $F(P) = \dfrac{1}{2}\left(-2\left(\|P\|^2\right)^{-1/2}\right) = -\dfrac{1}{\|P\|}$

IN ALTERNATIVA POSSO CHIAMARE RADIALE UN CAMPO

$$\vec{f}(P) = \psi(\|P\|)\,\hat{P} = \psi(\|P\|)\frac{P}{\|P\|} \qquad \underline{\underline{(\|P\| > 0)}}$$

Anche in questo caso trovo un potenziale prendendo

$$F(P) = \Psi(\|P\|) \qquad \text{dove} \qquad \Psi' = \psi$$

Infatti $\nabla \Psi(\|P\|) = \Psi'(\|P\|) \underbrace{\nabla \|P\|}_{\frac{P}{\|P\|}} = \psi(\|P\|) \frac{P}{\|P\|}$

Se facevo in questo modo nel caso di prima avevo

$$\frac{P}{\|P\|^3} = \frac{1}{\|P\|^2} \frac{P}{\|P\|} = \frac{1}{\|P\|^2} \hat{P}$$

dunque $\psi(s) = \frac{1}{s^2} \qquad \Psi = \frac{-1}{s} \Rightarrow F = \frac{-1}{\|P\|}$

$\vec{f} = \frac{1}{(x^2+y^2)} (x\vec{i} + y\vec{j})$ è definito su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Se si fanno i conti si vede che è irrotazionale MA noi sappiamo che $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ NON è semplicemente connesso

PERÒ VEDO che $\vec{f}$ è radiale $\vec{f}(P) = \varphi(\|P\|^2)\, P$

$(P = (x,y))$ $\qquad \varphi(s) = \frac{1}{s}$. DUNQUE $\vec{f}$ è conservativo

e un potenziale è dato da $F(P) = \frac{1}{2} \Phi(\|P\|^2)$

dove $\Phi(s) = \int \varphi(s)\,ds = \ln(|s|)$.

DUNQUE $F(x,y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) \; (+ \text{cost.})$

VERIFICA:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+y^2}\, 2y = \frac{y}{x^2+y^2}$$