Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 54 17/04/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

VISTO: Se $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^N)$ è di classe C^1

Allora

$\vec{f}$ CONSERVATIVO $\Longrightarrow$ $\vec{f}$ IRROTAZIONALE

dove

$\vec{f}$ irrotazionale significa $\forall i\, j$ $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$

($J\vec{f}$ è una matrice $N \times N$ SIMMETRICA)

(se F è un potenziale $J\vec{f} = H_F$ e H_F è simmetrica per Schwartz)

VEDIAMO CHE – IN GENERALE – NON VALE $\Longleftarrow$

Esempio (campo irrotazionale non conservativo)

IN $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definisco $\vec{f}(x,y) = \underbrace{\dfrac{-y}{x^2+y^2}}_{f_1(x,y)} \vec{i} + \underbrace{\dfrac{x}{x^2+y^2}}_{f_2(x,y)} \vec{j}$

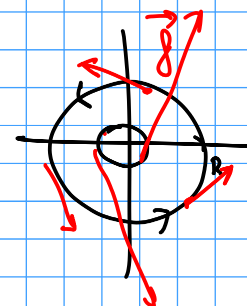
$\vec{f}$ è irrotazionale :

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} = -\frac{(x^2+y^2)-y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

=

Facciamo $\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}$ dove γ è una circonferenza con centro nell'origine



$0 \le t \le 2\pi$ $\quad \gamma(t) = R\left(\cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j}\right)$

$$\gamma'(t) = R\left(-\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j}\right)$$

e quindi

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(R\cos(t), R\sin(t))\cdot R\left(-\sin(t)\vec{i}+\cos(t)\vec{j}\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{-\cancel{R}\sin(t)}{\cancel{R^2}}\,\vec{i} + \frac{\cancel{R}\cos(t)}{\cancel{R^2}}\,\vec{j}\right)\left(-\cancel{R}\sin(t)\,i + \cancel{R}\cos(t)\,\vec{j}\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\sin^2(t)+\cos^2(t)\right)dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi\,(\neq 0)$$

$\vec{f}$ non è conservativo: se lo fosse l'integrale su ogni curva chiusa sarebbe zero.

Vediamo, sempre in questo esempio, quale "dovrebbe essere" il potenziale F di $\vec{f}$. MI SERVE UN $F(x,y)$ con le proprietà $\quad F: \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

(1) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$; (2) $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

Parto da (2). $F = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$

$$\int \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \frac{x}{x^2}\int \frac{dy}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \qquad \text{SE } x \neq 0$$

$$z = \frac{y}{x} \qquad dz = \frac{dy}{x} \qquad \Rightarrow \int \frac{dz}{1+z^2} = \arctan(z) + \text{cost}$$

DUNQUE

$$F(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \text{cost}(x) \qquad (\text{se } x \neq 0 \,!!)$$

DEVO IMPORRE LA (1) (per trovare cost(x))

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) + c'(x) =$$

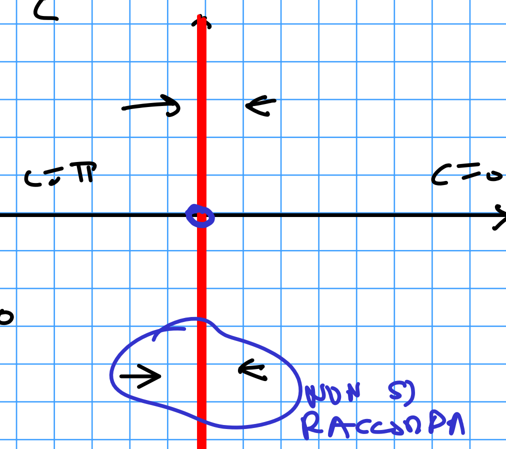
$$\frac{-y}{x^2+y^2} + c'(x)$$

DUNQUE, se impongo la (1), ottengo $c'(x)=0$, dunque

$$F(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c$$

TUTTO FUNZIONE SE $x \neq 0$

Nota che la c può ESSERE DIVERSA SU $x>0$/$x<0$



Nota che

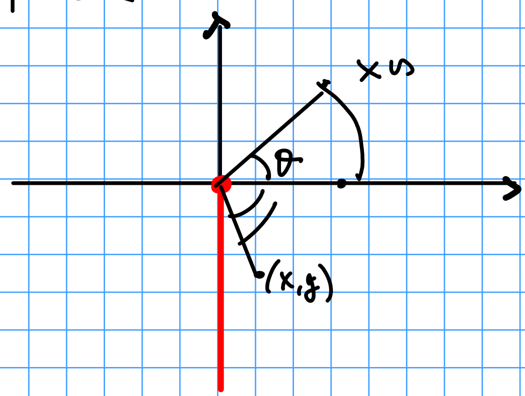
$$\lim_{x\to 0^+} F(x,y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + c & \text{se } y>0 \\ -\frac{\pi}{2} + c & \text{se } y<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} F(x,y) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + c & \text{se } y>0 \\ \frac{\pi}{2} + c & \text{se } y<0 \end{cases}$$

Se scelgo $c = 0$ su $x>0$ $\quad c = \pi$ su $x<0$

TROVO CHE F diventa C^0 (e anche C^1) su

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y),\ y \leq 0\}$



Quindi riesco a definire un potenziale su $\underline{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y),\ y \leq 0\}}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x>0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x<0 \end{cases}$$

SI PUÒ NOTARE CHE

$$\underbrace{\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \mathrm{ARG}\,(x,y)}_{\vartheta} \qquad \text{se } x>$$

Nei punti $x=0$ $\boxed{y<0}$ HO UN SALTO

$$\lim_{x\to 0^+} F(x,y) = -\frac{\pi}{2}$$

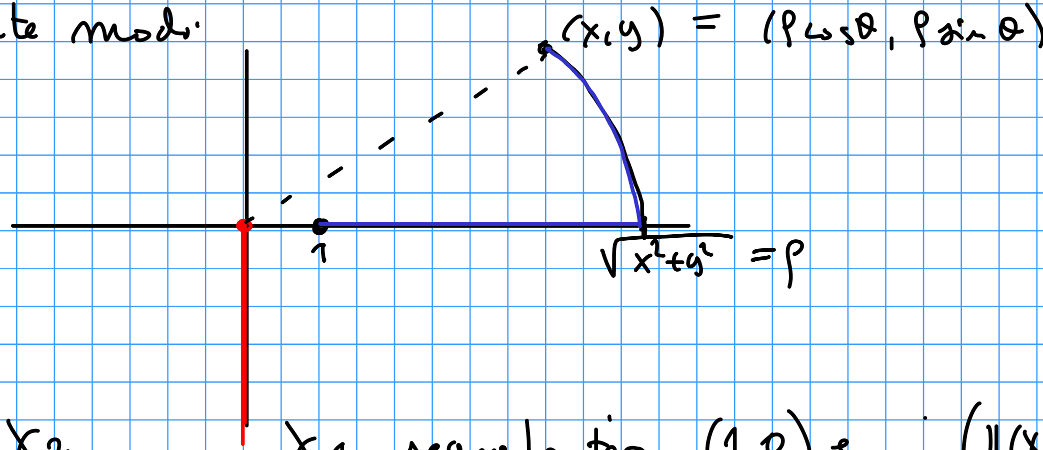
$$\lim_{x\to 0^-} F(x,y) = 3\frac{\pi}{2}$$

SI POTEVA ANCHE TROVARE F (su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y),\ y \leq 0\}$)

come segue: Dato un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y),\ y \leq 0\}$

considero una curva che congiunge $(1,0)$ e (x,y)

fatto nel seguente modo:



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ $\quad$ γ_1 segmento tra $(1,0)$ e $(\|(x,y)\|, 0)$

γ_2 è un arco di circonferenza (di raggio $\rho = \|(x,y)\|$) da $(\rho, 0)$ e (x,y) - scelgo l'arco da non passare per la semiretta

$$F(x,y) = \int_{\gamma_1} \vec{g} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_{\gamma_1} \vec{g} \cdot d\vec{s} = \qquad \gamma_1(x) = (x, 0) \quad \gamma_1'(x) = (1,0)$$

$$\int_1^\rho \vec{g}(x,0) \cdot (1,0)\, dx = \int_1^\rho \underbrace{g_1(x,0)}_{=0}\, dx = 0$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{g} \cdot d\vec{s} \qquad \gamma_2(t) = (\rho\cos(t), \rho\sin(t))$$

t da 0 a θ

se $\theta \geq 0$ ho

$$\int_0^\theta \vec{g}(\rho\cos t, \rho\sin t) \cdot (-\rho\sin(t), \rho\cos(t))\, dt =$$

$$(\text{conti di prima}) = \int_0^\theta 1\, dt = \theta$$

Anche se $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ trovo che l'integrale fa θ

$\Rightarrow$ Ho ritrovato che $F(x,y) = \mathrm{Arg}(x,y)$ (+ cost.)

(su $\mathbb{R}^2$ meno la semiretta).

L'ESEMPIO SUGGERISCE CHE IL PROBLEMA È IL BUCO IN $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ → se tolgo la semiretta il problema scompare!!

CI SERVONO ALCUNE NOZIONI (sottili!!)

Def. (OMOTOPIA) Sia Ω aperto in $\mathbb{R}^N$. Date γ_0 e γ_1 due curve in Ω (C^1 a tratti). Suppongo γ_0 e $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$

γ_0 e γ_1 devono essere (1): γ_0 e γ_1 hanno gli stessi estremi
(2) γ_0 e γ_1 entrambe chiuse.

Dico che γ_0 e γ_1 sono OMOTOPE (con stessi estremi / come curve chiuse)

se esiste una applicazione $H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$

(H si chiama OMOTOPIA) tale che

- H è continua (nelle due variabili)
- $H(t,0) = \gamma_0(t)$ $H(t,1) = \gamma_1(t)$ $\forall t \in [a,b]$
- $H(a,s) = H(a,0)$, $H(b,s) = H(b,0)$ (caso 1)

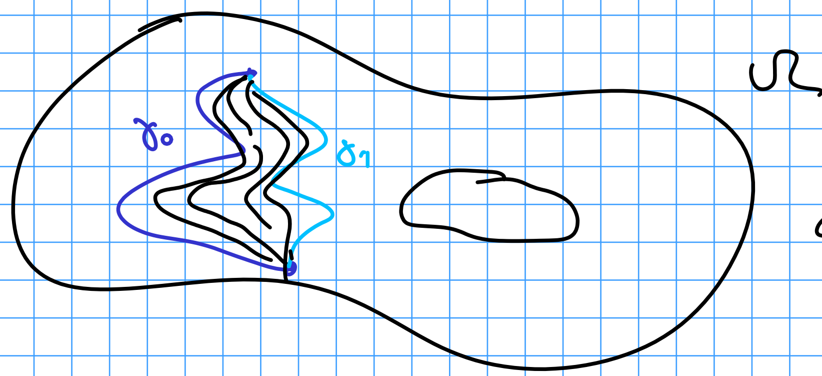
OPPURE

$H(a,s) = H(b,s)$ (caso 2)

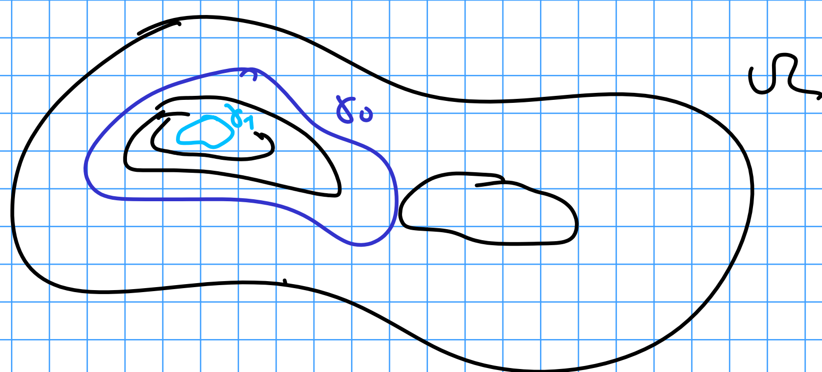
IDEA. Dato s posso interpretare $H(\cdot, s)$ come una curva $\gamma_s : [a,b] \to \Omega$

Quindi la H mi definisce una famiglia di curve γ_s, $0 \le s \le 1$

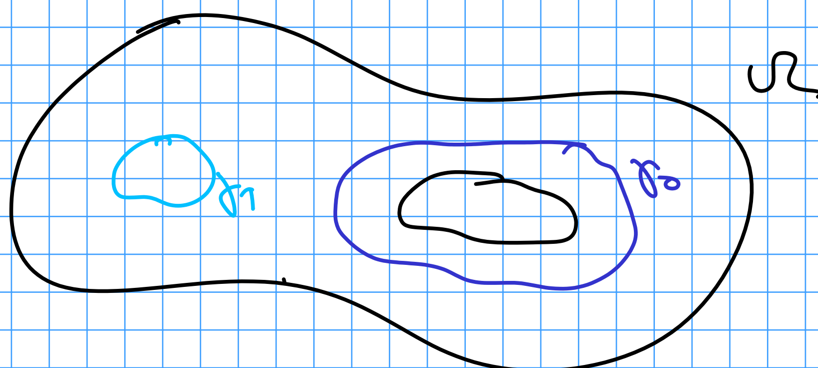
che coincidono con le curve iniziali per $s=0$, $s=1$ e che γ_s ha gli stessi estremi di γ_0/γ_1 / γ_s è chiusa



caso 1



caso 2



NON SONO OMOTOPE IN Ω

<u>TEOREMA</u> Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ C^1 IRROTAZIONALE. Siano γ_0 e γ_1 due curve omotope (di tipo (1) o di tipo (2)). Allora

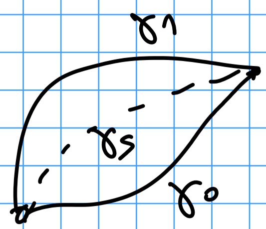
$$\int_{\gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

FACCIO LA DIM. CON UNA IPOTESI AGGIUNTIVA e cioè che l'omotopia H tra γ_0 e γ_1 (so che esiste per ipotesi) sia di classe C^2 (in entrambe le variabili)

DIM Come primo passo introduco $\gamma_s(t) = H(t,s)$

DIMOSTRERÒ che (faccio il caso 1 - a estremi fissi)

$$\int_{\gamma_s} \vec{f} \cdot d\vec{s} \qquad \text{è costante rispetto a } s$$



Per dimostrarlo faccio la derivata rispetto a s

$$\frac{d}{ds}\int_{\gamma_s} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{ds}\int_a^b \vec{f}(\gamma_s(t)) \cdot \gamma_s'(t)\, dt =$$

$$\frac{d}{ds}\int_a^b \vec{f}(H(t,s)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} H(t,s)\, dt = \quad \text{(Diamo per buono da teoria)}$$

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\left(\underbrace{\vec{f}(H(t,s)}\ \cdot \frac{\partial}{\partial t} H(t,s) \right) dt =$$

$$\int_a^b \left\{ \left(J_{\vec{f}}\,(H(t,s))\, \frac{\partial}{\partial s} H(t,s) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} H(t,s) + \right.$$
$$\left. \vec{f}(H(t,s)) \cdot \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} H(t,s) \right\} dt =$$

USO L'IPOTESI che $\vec{f}$ IRROTAZIONALE $\Longleftrightarrow$ $J_{\vec{f}}$ SIMMETRICA

A simmetrica $\Leftrightarrow$ $(A v_1) \cdot v_2 = (A v_2) \cdot v_1$

$$\int_a^b \left\{ \left(J_{\vec{f}}\,(H(t,s))\, \frac{\partial}{\partial t} H(t,s) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial s} H(t,s) + \right.$$
$$\left. \vec{f}(H(t,s)) \cdot \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} H(t,s) \right\} dt = \quad \text{(stessi passaggi a ritroso, scambiando } t \text{ e } s\text{)}$$

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{f}(H(t,s))\cdot \frac{\partial}{\partial s}H(t,s)\right) dt$$

Teorema del calcolo integrale

$$\left[\vec{f}(H(t,s))\cdot \frac{\partial}{\partial s}H(t,s)\right]_{t=a}^{t=b} =$$

$$\vec{f}(H(b,s))\cdot \frac{\partial}{\partial s}H(b,s) - \vec{f}(H(a,s))\cdot \frac{\partial}{\partial s}H(a,s)$$

MA sappiamo che $H(b,s) = H(b,0)$ (per ipotesi)

$H(a,s) = H(a,0)$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial s}(b,s) = 0 \qquad \frac{\partial H}{\partial s}(a,s) = 0$$

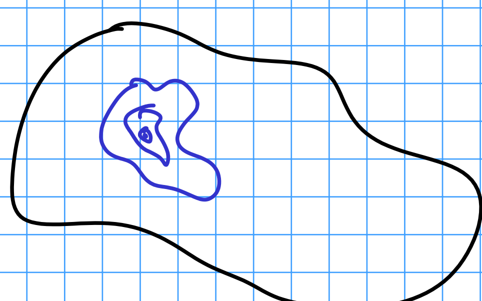
$\Rightarrow$ trovo zero alla fine. DUNQUE HO DIM. che

$$\frac{d}{ds}\oint_{\gamma_s} \vec{f}\cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \oint_{\gamma_s} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \oint_{\gamma_0} \vec{f}\cdot d\vec{s} \quad \forall s\in[0,1]$$

#

CONSEGUENZE DEL TEOREMA

Def. Dico che Ω è SEMPLICEMENTE CONNESSO se ogni curva chiusa in Ω è omotopa (caso 2) in Ω a una (curva) costante



IDEA: Ω non ha buchi

CONSEGUENZA Se Ω è semplicemente connesso e $\vec{f}$ è un campo irrotazionale $\Rightarrow$ $\vec{f}$ è conservativo

Dim Basta dim. che $\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = 0$ per ogni curva chiusa

so che esiste una costante γ_0 tale: che γ è omotopa a γ_0. Per il teorema

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_0} \vec{f}\cdot ds = \int_a^b \vec{f}(\gamma_0)\cdot \overset{\gamma_0'}{0}\, ds = 0$$

Per la caratterizzazione nota $\Rightarrow$ $\vec{f}$ è conservativo #

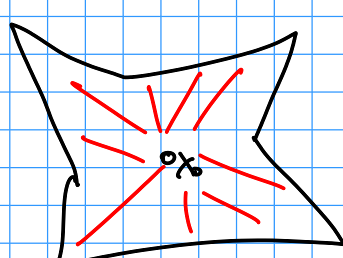
OSS. Da questo discorso si DEDUCE che $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ NON È semplicemente connesso (perché esiste su Ω un campo irrotazionale ma non conservativo)

CONDIZIONE sufficiente:

Ω aperto stellato $\Rightarrow$ Ω semplicemente connesso

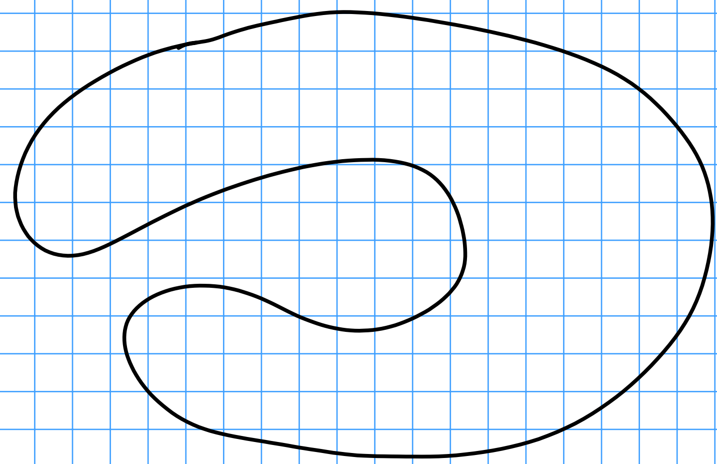
da se.

Def. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ si dice stellato rispetto a un suo punto x_0 se per ogni $x \in \Omega$ il segmento da x_0 e x è tutto contenuto in Ω



se metto una lampadina in x_0 illumino tutto Ω

PER ESEMPIO Ω CONVESSO



è semplicemente connesso ma non è stellato