Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 53 05/04/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

TEOREMA (CARATTERIZZAZIONE dei campi conservativi)

Supponiamo $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto) sia un campo continuo. Allora sono equivalenti

(a) $\vec{f}$ è conservativo;

(b) Se $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \Omega$ sono due curve C^1 a tratti aventi gli stessi estremi ($\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = P$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b) = Q$) allora

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

(c) Se γ è una curva chiusa, C^1 a tratti, in Ω, allora

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$$

Inoltre se $\vec{f}$ è conservativo, Ω è CONNESSO, ogni potenziale F per $\vec{f}$ si ottiene come segue:

$\exists$ costante c

$\exists\, x_0 \in \Omega$ per cui $F(x) = \int_{\gamma_{x_0,x}} \vec{f} \cdot d\vec{s} + c$ $\quad (F(x_0) = c)$

dove $\gamma_{x_0,x}$ è una (qualunque) curva in Ω che congiunge x_0 a X.
La cosa ha senso per la proprietà (b) $\quad$ F è ben definita!

Dim. $\quad$ Prima di tutto nota:

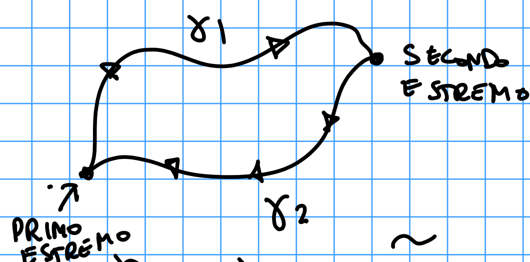
FATTO Se F è un potenziale per $\vec{f}$ $\quad$ ALLORA
per ogni curva C^1 (a tratti) $\quad \gamma : [a,b] \to \Omega$ si ha

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

(visto ieri).

- Da questo segue subito $\quad$ (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\quad$ (è ovvio che se γ è costante $\Rightarrow \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$)
- Vediamo che $\quad$ (c) $\Rightarrow$ (b)

Prendiamo γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi



Definiamo $\gamma = \gamma_1 \vee \tilde{\gamma}_2$ $\quad$ ($\tilde{\gamma}_2 = \gamma_2$ in verso opposto)

γ è una curva chiusa. Dunque

$$0 = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\tilde{\gamma}_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

- RIMANE DA DIM UNA FRECCIA (e la formula), per es. $\quad$ (b) $\Rightarrow$ (a)

Supponiamo che valga (b); fissiamo $x_0 \in \Omega$
(qui suppongo Ω connesso - si può poi generalizzare)

e definiamo $\quad F(x) = \int_{\gamma_{x_0,x}} \vec{f} \cdot d\vec{s}$

prendendo (a caso) una $\gamma_{x_0,x}$ che congiunge x_0 a x

(questa def. è ben posta perché vale (b)).

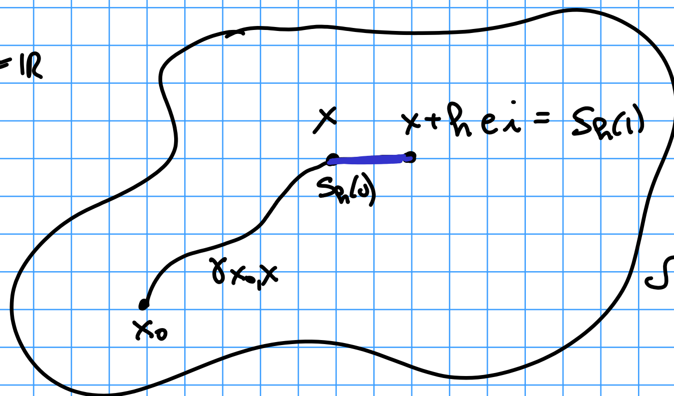
VOGLIO DIM CHE $\nabla F = \vec{f}$. (da questo segue (a))

In altri termini devo dim. che

$$\forall i = 1 \dots N \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \, (\text{esiste e}) = f_i(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

Sia $e_i = (0 \dots \overset{i}{1} \dots 0)$ e sia $h \in \mathbb{R}$ (piccolo). Consideriamo la curva $s_h : [0,1] \to \Omega$

$$s_h(t) = x + t h e_i$$



(s_h rappresenta il segmento tra x e $x + h e_i$)

Considero poi $\gamma_h = \gamma_{x_0,x} \vee s_h$, γ_h congiunge x_0 e $x + h e_i$. Facciamo il rapporto incrementale

$$\frac{F(x+he_i) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{\gamma_h} \vec{f} \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_{x_0,x}} \vec{f} \cdot d\vec{s} \right) =$$

$$\frac{1}{h} \int_{s_h} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{h} \int_0^1 \vec{f}(\underbrace{x + t h e_i}_{s_h(t)}) \cdot (\underbrace{h e_i}_{s_h'(t)}) \, dt =$$

$$\int_0^1 \vec{f}(x + t h e_i) \cdot e_i \, dt = \int_0^1 f_i(x + t h e_i) \, dt$$

Se $h \to 0$ (questo passaggio andrebbe giustificato - si può fare)

trovo
$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+he_i) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \int_0^1 f_i(x + t h e_i) \, dt =$$

$$\int_0^1 \lim_{h \to 0} f_i(x + t h e_i) \, dt = \int_0^1 f_i(x) \, dt = f_i(x) \int_0^1 dt = f_i(x)$$

Ho DIM. CHE $\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i$

- Rimane da dim. che i potenziali sono tutti della forma indicata. In effetti se F_1 e F_2 sono due potenziali

$$\Rightarrow \nabla F_1 = \nabla F_2 \quad (= \vec{f}) \quad \Rightarrow \nabla (F_1 - F_2) = 0$$

Dato che Ω è connesso $\quad F_1 - F_2 = \text{costante}$

<u>ESEMPIO</u> (esempio dell'altra volta "revisited") Prendiamo A $N \times N$ e definiamo $\vec{f}(x) = A x$. Voglio far vedere che $\vec{f}$ è conservativo $\Leftrightarrow$ A è simmetrica.

$\Leftarrow$ basta prendere $\quad F = \frac{1}{2} A x \cdot x = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} x_i x_j$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} \left(\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_k} x_i \right)}_{\delta_{ki}} \cdot x_j + x_i \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_k} x_j \right)}_{\delta_{kj}} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \sum_j a_{kj} x_j + \frac{1}{2} \sum_i a_{ik} x_i =$$

$$\frac{1}{2} (A x)_k + \frac{1}{2} (A^t x)_k \overset{(A \text{ simmetrica})}{=} (Ax)_k$$

DUNQUE. $\quad \nabla F = A x$

$\Rightarrow$ Dato $x \in \mathbb{R}^N$ calcoliamo

$$\int_{s_x} \vec{f} \cdot d\vec{s} \qquad \text{dove} \quad s_x(t) = t x \qquad t \in [0,1]$$

$$= \int_0^1 \underbrace{A (t x)}_{f(s_x)} \cdot \underbrace{x}_{s_x'} \, dt = \int_0^1 t \, (Ax \cdot x) \, dt = Ax \cdot x \int_0^1 t \, dt =$$

$$\frac{1}{2} A x \cdot x$$

Dunque se Ax è conservativo, necessariamente $F = \frac{1}{2} A x x + \text{cost}$.

Se rifaccio il calcolo di prima vedo che

$$\nabla F = \frac{1}{2} A x + \frac{1}{2} A^t x \quad = A x \Leftrightarrow A \text{ è simmetrica.}$$

$$\left(\frac{1}{2} A^t = \frac{1}{2} A \iff A^t = A \iff A \text{ simmetrica} \right)$$

\#

Prendiamo un campo $\vec{f}$ di classe C^1 (finora bastava C^0)

e supponiamo che $\vec{f}$ sia conservativo. Dunque $\exists F$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i \qquad i = 1 \dots N,$$

Se derivo rispetto a x_j trovo

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (\leftarrow \text{CONTINUE})$$

Ma F è C^2, $\Rightarrow$ vale Schwartz, $\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$.

NE SEGUE :

$$\vec{f} \text{ conservativo} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}} \quad \forall i,j = 1 \dots N$$

La seconda proprietà si esprime dicendo che $\vec{f}$ è IRROTAZIONALE

(perché se siamo in $\mathbb{R}^2$ la proprietà equivale a $\operatorname{rot} \vec{f} = 0$)

(IN OGNI CASO LA PROPRIETÀ HA SENSO IN ogni N, anche se non si può definire il rotore)

DUNQUE $\vec{f}$ conservativo $\Rightarrow$ $\vec{f}$ IRROTAZIONALE

Vedremo che $\Leftarrow$ non è sempre vero e che la sua validità è legata alla "forma di Ω"

<u>ESERCIZIO</u> Si può ridimostrare (per la terza volta ...) che Ax è conservativo $\Rightarrow$ A simmetrica, usando il fatto che Ax deve essere irrotazionale

(QUESTO È IL MODO PIÙ SEMPLICE) $\left(\frac{\partial (Ax)_i}{\partial x_j} = a_{ij} \;?? \right)$

FINE
(per ora...)

BUONA
PASQUA