Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 52 04/04/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Da ieri:

$$\boxed{x^2 y'' - 3y' - 6y = 6} \qquad y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$$

$\vdots$

$$(R) \quad \begin{cases} y_1 = -2(y_0+1) & (n=0) \\ y_{n+1} = \dfrac{(n+2)(n-3)}{3(n+1)} y_n & \left(= \dfrac{n^2-n-6}{3(n+1)} y_n \right) \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Allora $0 = y_4 = y_5 = \dots y_n \quad \forall n \geq 4$

Mettiamo che $y_0 = 1$ e calcoliamo gli altri coefficienti.

$$y_0 = 1, \quad y_1 = -4, \quad y_2 \overset{(n=1)}{=} \underbrace{\frac{\cancel{3}(-\cancel{2})(-4)}{\cancel{3}(\cancel{2})}}_{y_1} = 4$$

$$y_3 \overset{(n=2)}{=} \frac{4(-1)}{3}\frac{4}{3} = -\frac{16}{9} \qquad y_4 = 0 \dots \quad y_n = 0 \quad \forall n \geq 4$$

LA SOL. CON $y(0) = 1$ è data da

$$y(x) = 1 - 4x + 4x^2 - \frac{16}{9}x^3$$

Per curiosità facciamo la verifica:

$$y(x) = 1 - 4x + 4x^2 - \frac{16}{9}x^3 \Rightarrow -6y(x) = -6 + \cancel{24x} - \cancel{24x^2} + \cancel{\frac{32}{3}x^3}$$

$$y'(x) = -4 + 8x - \frac{16}{3}x^2 \Rightarrow -3y'(x) = 12 - \cancel{24x} + \cancel{16x^2}$$

$$y''(x) = 8 - \frac{32}{3}x \Rightarrow x^2y''(x) \qquad \cancel{8x^2} - \cancel{\frac{32}{3}x^3}$$

$\Rightarrow x^2y'' - 3y' - 6y = 6$ e $y(0) = 1$ <u>TORNA</u>

COME È FATTA LA SOL. GENERALE ??

$$y_0 = y_0, \quad y_1 = -2(y_0+1), \quad y_2 = -y_1 = 2(y_0+1)$$

$$y_3 = -\frac{4}{9}y_2 = -\frac{8}{9}(y_0+1)$$

$$\Rightarrow y(x) = y_0 - 2y_0x - 2x + 2y_0x^2 + 2x^2 - \frac{8}{9}y_0x^3 - \frac{8}{9}x^3 =$$

$$\underbrace{y_0\left(1 - 2x + 2x^2 - \frac{8}{9}x^3\right)}_{\text{sol dell'omogenea che vale } y_0 \text{ in } x=0} \underbrace{- 2x + 2x^2 - \frac{8}{9}x^3}_{\text{sol. particolare}}$$

Vediamolo: $\tilde{y}(x) = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{8}{9}x^3 \Rightarrow -6\tilde{y}(x) = -\cancel{6} + \cancel{12x} - \cancel{12x^2} + \cancel{\frac{16}{3}x^3}$

$$\tilde{y}'(x) = -2 + 4x - \frac{8}{3}x^2 \Rightarrow -3\tilde{y}'(x) = \cancel{6} - \cancel{12x} + \cancel{8x^2}$$

$$\tilde{y}''(x) = 4 - \frac{16}{3}x^2 \Rightarrow x^2\tilde{y}''(x) = \cancel{4x^2} - \cancel{\frac{16}{3}x^3}$$

$\tilde{y}$ è sol. dell'omogenea

$$\bar{y}(x) = -2x + 2x^2 - \frac{8}{9}x^3 \Rightarrow -6\bar{y}(x) = \cancel{12x} - \cancel{12x^2} + \cancel{\frac{16}{3}x^3}$$

$$\bar{y}'(x) = -2 + 4x - \frac{8}{3}x^2 \Rightarrow -3\bar{y}'(x) = 6 - \cancel{12x} + \cancel{8x^2}$$

$$\bar{y}''(x) = 4 - \frac{16}{3}x \Rightarrow x^2\bar{y}''(x) \qquad \cancel{4x^2} - \cancel{\frac{16}{3}x^3}$$

OSS. la sol. con $y(0) = -1$ è costante

Se cambio il coeff di y nell'eq. diff.:

$$x^2 y'' - 3y' - 7y = 6$$

... $\rightarrow$ $$y_{n+1} = \frac{n^2 - n - 7}{3(n+1)} y_n + \frac{b_n}{3(n+1)} \qquad b_n \begin{cases} 6 & n=0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases}$$

$n=0$ $$y_1 = \frac{7}{3} y_0 + 2$$

$n \geq 1$ $$y_{n+1} = \frac{n^2 - n - 7}{3(n+1)} y_n$$

$\left(n^2 - n - 7 = 0 \iff n = \frac{1 \pm \sqrt{1+28}}{2} \quad \text{NON INTERI} \right)$

Ho trovato y_n $\forall n$. PROBLEMA: $\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$ converge?

QUAL E' IL SUO RAGGIO DI CONV. R

R lo calcolo mediante Cesaro

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{y_{n+1}}{y_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n^2 - n - 7}{3(n+1)} \right| = \infty \qquad \left(\text{serve } y_n \neq 0 \ \forall n \right)$$

$R = 0$ DUNQUE NON ESISTONO SOLUZIONI (vicino a zero)

TRANNE LA SOL COSTANTE $y(x) = y_0 = -\frac{6}{7}$

ESEMPIO

$$(1+x)x y'' - (4x+1) y' + 4y = \overbrace{4 + 2x^2}^{\text{termine noto}}$$

cerco $$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n\, n\, x^{n-1} \quad \left(= \sum_{n=1}^{\infty} y_n\, n\, x^{n-1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1}(n+1)\, x^{n}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n\, n(n-1)\, x^{n-2} \quad \left(= \sum_{n=1}^{\infty} y_n\, n(n-1)\, x^{n-2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1}(n+1)\, n\, x^{n-1}$$

Allora

$$(x + x^2)\, y'' - (4x+1)\, y' + 4y =$$

$$\sum_{0}^{\infty} y_{n+1}(n+1)n\, x^n + \sum_{0}^{\infty} y_n\, n(n-1)\, x^n +$$

$$\sum_{0}^{\infty} y_n\, n(-4)\, x^n + \sum y_{n+1}(n+1)(-1)\, x^n + \sum_{0}^{\infty} y_n (4)\, x^n =$$

$$\sum_{0}^{\infty} x^n \left(y_{n+1}(n^2+n) + y_n(n^2-n) + y_n(-4n) + y_{n+1}(-n-1) + y_n \cdot 4 \right)$$

$$\sum_{0}^{\infty} \left(y_{n+1}(n^2+n-n-1) + y_n(n^2-n-4n+4) \right) x^n =$$

$$\sum_{0}^{\infty} \left(y_{n+1}(n+1)(n-1) + y_n(n^2-5n+4) \right) x^n =$$

$$n^2 - 5n + 4 = 0 \iff n = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \qquad \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$$(n-4)(n-1)$$

$$\sum_{0}^{\infty} \left(y_{n+1}(n+1) + y_n(n-4) \right)(n-1)\, x^n$$

DEVE FARE $\quad 4 + 2x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad$ dove $b_0 = 4 \quad b_2 = 2$

$b_n = 0 \quad$ se $n \neq 0, 2$

DUNQUE TROVO

$$(*) \quad (n-1)\left(y_{n+1}(n+1) + y_n(n-4) \right) = b_n \quad \forall n$$

SE METTO $n = 1$?? TROVO $0 = b_1$ TORNA

Per $n=1$ la $(*)$ è vero e non mi dà nessuna informazione

(nessuna relazione tra y_2 e y_1)

CONDIZIONE SUL TERMINE NOTO $g(x)$

$g'(0) = 0$!! / senno $\nexists$ sol.

Se $n=0$ trovo $-(y_1 - 4y_0) = b_0 = 4$

$\iff y_1 = 4y_0 - 4 = 4(y_0 - 1)$ Nessun vincolo su y_0

$\boxed{y_1 = 4(y_0-1)}$ $\boxed{y_0 \text{ LIBERO}}$

Per quanto detto nel caso $n=1 \Rightarrow$ $\boxed{y_2 \text{ è libero}}$

Se $n \geq 2$ posso riscrivere $(*)$ come

$$(R) \quad y_{n+1} = \frac{(4-n)\,y_n}{n+1} + \frac{b_n}{n^2-1} \qquad n \geq 2$$

$\underline{n=2} \Rightarrow$ $\boxed{y_3 = \frac{2}{3}(y_2+1)} = \frac{2}{3}(y_2+1)$

$\underline{n=3}$ $\quad y_4 = \frac{y_3}{4} + 0 \Rightarrow \boxed{y_4 = \frac{1}{6}(y_2+1)}$

se $n=4$ trovo $y_5 = 0$, $\Rightarrow y_n = 0$ $\underline{\forall n \geq 5}$

Alla fine

$$y(x) = y_0 + 4(y_0-1)x + y_2x^2 + \frac{2}{3}(y_2+1)x^3 + \frac{1}{6}(y_2+1)x^4$$

$$= \underbrace{y_0(1+4x) + y_2\left(x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4\right)}_{\text{SOL. DELL'OMOGENEA}} + \underbrace{\left(-4x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4\right)}_{\text{SOL. PARTICOLARE}}$$

y è un polinomio di grado 4

$\bar{y}$ tale che $\bar{y}(0) = \bar{y}''(0) = 0$

IN QUESTO CASO ESISTE UNICA LA SOL. SE ASSEGNO $y(0)$ e $y''(0)$.

$\left(y_0 = y(0) \quad y_2 = \frac{y''(0)}{2} \right)$

NON POSSO ASSEGNARE $y'(0)$ e $y(0)$ visto che ho il legame

$$y'(0) = 4\,(y(0)-1)$$

TERZO COMPITINO VENERDÌ 28 alle 15 aula B21 (mi pare)

CAMPI CONSERVATIVI

<u>Def.</u> Chiamo "CAMPO DI VETTORI" un'applicazione $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^N$

(Ricordo che se $\vec{f}$ è un campo e γ è una curva in Ω C^1. (C^1 a tratti) è definito

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} \underset{(\text{caso } C^1)}{=} \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \quad)$$

(INTEGR. CURVILINEO DI II° specie) $\left(\int_a^b \vec{f} \cdot \hat{t}_\gamma \; ds \right)$

$\hat{t}_\gamma$ = <u>versore</u> tangente

<u>Def.</u> $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ ($\vec{f}$ CONTINUO) si dice CONSERVATIVO se esiste

$F : \Omega \to \mathbb{R}$ (F è "scalare") (F di classe C^1) tale che $\vec{f} = \nabla F$

e cioè $f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$

Nel caso $N=3$ di solito scrivo

$$\vec{f}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\vec{i} + f_2(x,y,z)\vec{j} + f_3(x,y,z)\vec{k}$$

e la cond. di essere conservativo:

$$f_1(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)$$
$$f_2(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)$$
$$f_3(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)$$

OSS. Se $N=1$ tutti i campi continui sono conservativi perché per ogni f esiste F : $F' = f$ (T.F.C.I.)

LA FUNZIONE F, se esiste, si chiama POTENZIALE per il campo $\vec{f}$

ESEMPIO (se $N \geq 2$ ci sono campi continui che non sono conservativi) Considero $N=2$ e prendo

$$\vec{f}(x,y) = (ax+by)\vec{i} + (cx+dy)\vec{j}$$

Ammettiamo che $\vec{f}$ sia conservativo. Dovrebbe $\exists\, F(x,y)$ tale che

$$(\mathrm{I}) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = ax+by \qquad (\mathrm{II}) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = cx+dy$$

Dalla (I) integrando rispetto a x $\Rightarrow$

$$F(x,y) = \frac{ax^2}{2} + bxy + c(y)$$

dove c è una funzione derivabile della y.

Derivo la relazione sopra rispetto a y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = bx + c'(y) \quad \text{che deve fare} \quad cx + dy$$

$$\Longleftrightarrow \quad b = c \qquad c(y) = \frac{dy^2}{2} + \gamma \qquad \text{con } \gamma \in \mathbb{R}$$

DUNQUE il campo è conservativo **solo** se $b = c$

Se ciò avviene i potenziali possibili sono dati da

$$F(x,y) = \frac{ax^2}{2} + bxy + \frac{by^2}{2} + \gamma$$

IN TERMINI "MATRICIALI" si trova:

Se $\quad g(X) = AX \qquad X \in \mathbb{R}^N$

$A \quad N \times N$

g è conservativo $\Longleftrightarrow$ A è simmetrica. Se ciò avviene

$$F(X) = \frac{1}{2} AX \cdot X \quad \left(\tfrac{1}{2} \text{ della forma quadratica associata ad } A\right)$$

TEOREMA (CARATTERIZZAZIONE dei campi conservativi)

Supponiamo $\vec{g} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto) sia un campo continuo. Allora sono equivalenti

(a) $\vec{g}$ è conservativo;

(b) Se $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \Omega$ sono due curve C^1 a tratti aventi gli stessi estremi ($\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = P$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b) = Q$) allora

$$\int_{\gamma_1} \vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

(3) Se γ è una curva chiusa, C^1 a tratti, in Ω. allora

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = 0$$

Inoltre se vale una di queste (a / b / c), e se Ω è connesso allora i potenziali F per $\vec{f}$ sono tutti della forma:

$$F(x) = \int_{\gamma_{x_0 x}} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

dove γ_x è una qualunque curva che "collega" x_0 a x

essendo x_0 un punto prefissato.

IN ALTRI TERMINI – NEL CASO Ω connesso – per ogni potenziale F esiste un punto $x_0 \in \Omega$ tale che

$$F(x) = \int_{\gamma_{x_0 x}} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

dove $\gamma_{x_0 x}$ è una (qualunque) curva t.c. $\gamma_{x_0 x}(a) = x_0$ $\gamma_{x_0 x}(b) = x$

(in part. $F(x_0) = 0$)

DIMOSTREREMO IL TEOREMA. Vediamo una parte (semplice)

<u>FATTO</u> Se F è un potenziale per $\vec{f}$ ALLORA per ogni curva C^1 (a tratti) $\gamma : [a,b] \to \Omega$ si ha

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

<u>DIM.</u> CASO $\gamma \in C^1$.

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \text{(dato che } F \text{ è un potenziale)}$$

$$\int_a^b \nabla F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\,dt = \text{(T.F.C.I.)}$$

$$\Big[F(\gamma(t))\Big]_{t=a}^{t=b} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Ne segue che (a) $\Rightarrow$ (b) / (a) $\Rightarrow$ (c)

FINIAMO DOMANI