Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 51 03/04/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$u_0 \in L^2$ $\sum_1^\infty u_n^2 < +\infty$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(+f(x,t)\right) \\ u(x,0) = u_0(x) = \sum u_n \sin(nx) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

$L = \pi$ $\boxed{\omega_1 = 1}$

ABBIAMO TROVATO LA FORMULA $\boxed{u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{e^{-n^2 t} u_n \sin(nx)}_{F_n(t,x)}}$

Verifico che effettivamente u è soluzione ...

(1) VERIFICO CHE u è derivabile in t.

Calcolo le derivate in t di $F_n(t,x)$

$$\frac{\partial}{\partial t} F_n(t,x) = -n^2 e^{-n^2 t} u_n \sin(nx)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} F_n(t,x) = (-n^2)^k e^{-n^2 t} u_n \sin(nx)$$

VORREI LA CONV. TOT ($\Rightarrow$ CONV. UNIF) di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^k}{\partial t^k} F_n(t,x)$

Se faccio la conv. TOT su $\{t \geq 0\}$ NON CI RIESCO ...

FISSO $\underline{T > 0}$ e cerco

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial t^k} F_n \right\|_{\infty, [T,\infty]} = \sup_{t \geq T} \left| (-n^2)^k e^{-n^2 t} u_n \sin(nx) \right| \leq \underbrace{n^{2k} e^{-n^2 T} |u_n|}$$

sommabile a causa dell'esponenziale (che "vince" su n^{2k}) $u_n \to 0$ per come noto

Per i teoremi $\Rightarrow$ $u(t,x)$ è derivabile in t se $t \geq T$ e si può derivare per serie; in particolare

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{1}^{\infty} -n^2 e^{-n^2 t} u_n \sin(nx) \leftarrow$$

(2) Voglio dim. che u è derivabile in x, stesso ragionamento: calcolo

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} F_n(t,x) = (\pm 1) n^k e^{-nt} u_n \left(\sin(nx) / \cos(n) \text{ a seconda che } k \text{ pari / dispari} \right)$$

??

se passo al modulo $\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} F_n(t,x) \right| \leq n^k e^{-n^2 T} |u_n|$ (anche qui prendo $t \geq T$)

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial^k}{\partial x^k} F_n \right\|_{\infty, [T,\infty[} \leq \underbrace{n^k e^{-n^2 T} |u_n|}_{\text{SOMMABILE}}$$

A CAUSA DI e^{-nT}

DUNQUE u è derivabile in x se $t \geq T$ e si può derivare per serie; in particolare

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \sum -n^2 e^{-n^2 t} u_n \sin(nx) \leftarrow$$

(3) da (1) e (2) $\Rightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ se $t \geq T$

Dato che $T > 0$ è arbitrario ottengo

$$u \text{ è } C^\infty \text{ in } t \text{ e in } x \text{ su } \{(x,t) : x \in [0,\pi], \underline{\underline{t > 0}}\}$$

(4) sempre per quanto visto in (2) (usando la sommabilità di $F_n(t,x)$ $(t \geq T)$ OTTENGO CHE $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

(perché in x ho una serie di seni!). SEMPRE $t > 0$

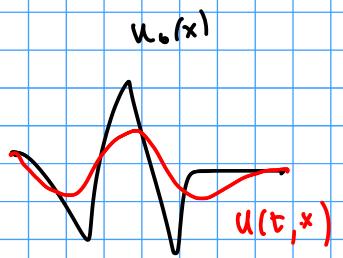
(5) Cosa succede in $t = 0$?? DIPENDE DA u_0 !!

Finora non ho detto quasi nulla su u_0 (solo che $\|u_0\|_{L^2} < +\infty$)

Vediamo la differenza

$$u(t,x) - u_0(x) = \sum_1^\infty \left(e^{-n^2 t} - 1\right) u_n \sin(nx) \quad \leftarrow$$

Per Parseval: $\pi \, \| \underbrace{u(t,\cdot)}_{t \text{ è un parametro}} - u_0 \|_{L^2}^2 = \sum_1^\infty \left(e^{-n^2 t} - 1\right)^2 u_n^2$



Si può dimostrare che

$$\sum_1^\infty \left(e^{-n^2 t} - 1\right)^2 u_n^2 \longrightarrow 0 \quad \text{se } t \to 0^+$$

IDEA: uso il teorema di Lebesgue (conv. dominata, per le serie invece che per gli integrali)

: Se $a_{n,m}$

- $a_{n,m} \to a_n$ per $m \to \infty$
- $|a_{n,m}| \le b_n \quad \forall n,m$ ← DOMINATA
- $\sum_1^\infty b_n < +\infty$

$$\Rightarrow \quad \sum_1^\infty a_{n,m} \xrightarrow{m \to \infty} \sum_1^\infty a_n$$

NEL CASO SOPRA ho una serie che dipende dal "parametro" t (t fa le veci di m sopra). Quando $t \to 0^+$

$$\left(e^{-n^2 t} - 1\right)^2 u_n^2 \longrightarrow 0$$

Ho anche che

$$\left| \left(e^{-n^2 t} - 1\right)^2 u_n^2 \right| \le u_n^2 \quad \text{e} \quad \sum u_n^2 < +\infty \quad \leftarrow \text{DOMINANTE}$$

$\rightsquigarrow$ (teorema tipo Lebesgue)

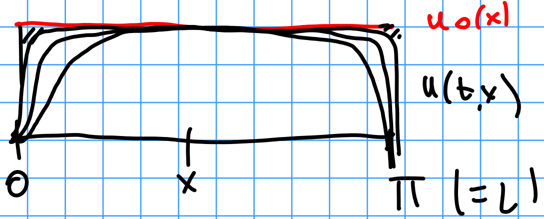
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-n^2 t} - 1\right)^2 u_n^2 \to 0$$

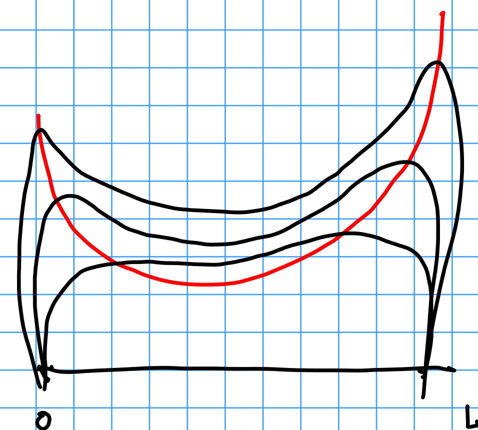
Ne segue che: se $u_0 \in L^2([0,\pi]) \Rightarrow$

$$\lim_{t\to 0^+} \| u(t,\cdot) - u_0 \|_{L^2} = 0$$

IN QUESTO "SENSO INTEGRALE" $u(0,x) = u_0$

IN EFFETTI POTREI AVERE





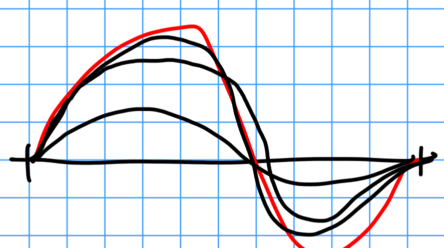
SE SO DI PIÙ SU $u_0 \Rightarrow$ TROVO DI MEGLIO.

Per esempio se $\sum_1^{\infty} |u_n| < +\infty$ ($\Rightarrow u_0(x)$ è continua e nulla agli estremi, dato che $\sum u_n \sin(nx) \to u_0(x)$ UNIF.)

allora si dimostra che

$$\lim_{t\to 0^+} \| u(t,\cdot) - u_0 \| = 0$$

cioè $u(t,\cdot) \to u_0$ UNIF.



(b) È anche facile dimostrare che

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 0$$

Torniamo alle serie di potenze - VEDIAMO UN LORO USO NELLO STUDIO DI ALCUNE EQ. DIFF. lineari (ordinarie)

IL PROTOTIPO che vorrei studiare è l'eq.

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = f(x) \qquad x\in I$$

dove a b c f sono analitiche (su un intervallo I)

La teoria solita dice che, se $a(x)\neq 0$ in I (a,b,c,f CONTINUE) esiste unica la sol. una volta assegnati

$$y(x_0) \quad e \quad y'(x_0) \qquad (\underbrace{x_0\in I})$$

In effetti se $a(x)\neq 0$ posso dividere per $a(x)$ e ottenere

$$y'' + b_1(x)\,y' + c_1(x)\,y = f_1(x)$$

EQ. IN FORMA NORMALE (il coeff. di y'' è uno) e VALE IL TH. di esistenza e unicità per il problema di Cauchy

Nel nostro caso non è detto che $a(x)=0$. VEDIAMO COSA SUCCEDE

IDEA: cerco $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n\,(x-x_0)^n$

cioè cerco y come una serie di potenze centrata nel punto x_0

FACENDO DEI CONTI SI DIMOSTRA CHE

nell'ipotesi a,b,c,f analitiche $\Rightarrow$ ogni sol y è analitica.

NEL SEGUITO FACCIAMO DEGLI ESEMPI IN CASI SEMPLICI

ESEMPIO Voglio trovare le soluzioni di

$$xy'' - y' - y = 0$$

QUI $I = \mathbb{R}$, prendo $x_0 = 0$ e l'eq. NON SI PUÒ METTERE IN FORMA NORMALE (vicino a 0)

L'eq. è lineare ed è OMOGENEA ($f = 0$)

COME DETTO CERCO y della forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n \qquad (\text{l'incognite sono le } y_n \in \mathbb{R})$$

Faccio finta di poter derivare per serie; allora:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n n x^{n-1} \left(= \sum_{\substack{n=0 \\ \text{se } n=0}}^{\infty} y_n \underset{\text{trovo } 0}{n} x^{n-1} \right) \underset{\substack{\text{cambio di indice} \\ m-1=m}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} (n+1) x^n$$

$$y'' = \sum_{m=0}^{\infty} y_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{m=1}^{\infty} y_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} y_n n(n-1) x^{n-2}$$

$$(m = n-1) \quad = \underline{\sum_{m=0}^{\infty} y_{n+1} (m+1) n x^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} y_{n+1} (n+1) n x^{n-1} =$$

$$(m = m-2) \quad \sum_{m=0}^{\infty} y_{n+2} (n+2)(m+1) x^n$$

(TUTTI MODI POSSIBILI DI SCRIVERE y'')

SE IMPONGO CHE VALGA L'EQUAZIONE HO:

$$xy'' - y' - y = x \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} (n+1) n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} (n+1) x^n$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} y_m x^n = \sum_{m=0}^{\infty} \left(y_{n+1} \underbracket{(n+1)} n - y_{n+1} \underbracket{(n+1)} - y_n \right) x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(y_{m+1} (n+1)(n-1) - y_n \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(y_{n+1} (n^2-1) - y_n \right) x^n = 0$$

OTTENGO

$$(*) \quad y_{n+1}(n^2-1) = y_n \qquad \forall n \geq 0$$

Se potessi dividere per n^2-1 avrei la relazione ricorsiva

$$(R) \qquad y_{n+1} = \frac{1}{n^2-1} y_n$$

ATTENZIONE A $n=1$

In realtà posso scrivere (R) se $n \geq 2$. Per $n=0$ / $n=1$ usiamo $(*)$.

$\underline{n=0}$ $\quad y_1(-1) = y_0 \qquad y_1 = -y_0$

$\underline{n=1}$ $\quad 0 = y_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_1 = y_0 = 0} \leftarrow$!!!

QUESTO CI DICE che se $y(x)$ è soluzione $\Rightarrow y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$

$\left(\text{perché} \qquad y_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)$

La condizione $(*)$ non ci dice nulla su y_2

DUNQUE i coeff. y_n sono individuati dalle seguenti condizioni

$$(R) \quad \begin{cases} y_0 = y_1 = 0 \qquad y_2 \text{ "libero"} \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{n^2-1} y_n \qquad n \geq 2 \end{cases}$$

Questo (R) individua univocamente tutti gli y_n UNA VOLTA ASSEGNATO y_2 $\left(= \frac{y''(0)}{2}\right)$. VOLENDO POTREI DEFINIRE $\hat{y}_n$ mediante

$$(\hat{R}) \quad \begin{cases} \hat{y}_0 = \hat{y}_1 = 0, \qquad \hat{y}_2 = 1 \\ \hat{y}_{n+1} = \dfrac{1}{n^2-1} \hat{y}_n \qquad n \geq 2 \end{cases}$$

$(\hat{y}_n)$ è univocamente determinato. Allora $y_n = y_2 \hat{y}_n$

(uso la linearità)

Vediamo per curiosità alcuni valori di $\hat{y}_n$

$$\underset{\hat{y}_0}{0}, \underset{\hat{y}_1}{0}, \underset{\hat{y}_2}{1}, \underset{\hat{y}_3}{\frac{1}{3}}, \underset{\hat{y}_4}{\frac{1}{8}\frac{1}{3} = \frac{1}{24}}, \underset{\hat{y}_5}{\frac{1}{15}\frac{1}{24} = \dots}, \dots$$

TUTTO QUESTO VA CONTROLLATO A POSTERIORI. CI DOBBIAMO CHIEDERE PER QUALI x la $y(x)$ converge $\leftrightarrow$ qual è il raggio di convergenza della serie trovata

POSSIAMO USARE "CESARO" $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ se } \underline{a_n > 0} \right)$

Nel nostro caso ho $\left| \frac{\hat{y}_{n+1}}{\hat{y}_n} \right| = \left| \frac{1}{n^2-1} \right| \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{|\hat{y}_n|} \to 0 \Rightarrow R = \frac{1}{0} = +\infty$$

DUNQUE $y(x)$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre per i teoremi sulle serie di potenze possiamo derivare per serie e tutti i conti che abbiamo fatto all'inizio sono leciti.

ALLA FINE LA FORMULA TROVATA CI DÀ <u>TUTTE</u> le soluzione dell'equazione definite su $\mathbb{R}$

DUNQUE TROVIAMO CHE

(1) se y è soluzione $y(0) = y'(0) = 0$

(2) Se assegno $y''(0)$ trovo una e una sola soluzione con questa condizione.

<u>ESEMPIO 2</u> $\quad x^2 y'' - 3y' - 6y = 6$ ← NON È OMOGENEA

Faccio come prima. Cerco $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$

$$x^2 y'' - 3y' - 6y = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} y_n n(n-1) x^{n-2} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1}(n+1) x^n$$

$$-6 \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-3(n+1) y_{n+1} + \underbrace{(n^2-n-6)}_{\text{LO FATTORIZZO}} y_n \Big) x^n =$$

$$\left(n^2-n-6=0 \iff n = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-3(n+1) y_{n+1} + (n+2)(n-3) y_n \Big) x^n \quad \boxed{= 6 = \sum b_n x^n}$$

dove $b_0 = 6$, $b_n = 0$ $n \geq 1$

$$\Downarrow$$

$$(*) \quad \boxed{-3(n+1) y_{n+1} + (n+2)(n-3) y_n = \begin{cases} 6 & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases} = b_n}$$

Dato che $n+1 \neq 0$ $\forall n$ posso dividere per $n+1$ ottenendo

$\forall n \geq 0$ $$y_{n+1} = \frac{(n+2)(n-3)}{3(n+1)} y_n - \frac{b_n}{3(n+1)} \qquad b_n = \begin{cases} 0 & n \geq 1 \\ 6 & n=0 \end{cases}$$

SE TRATTO A PARTE $n=0$ trovo $y_1 = -2y_0 - 2$

DUNQUE

$$(R) \quad \begin{cases} y_1 = -2(y_0+1) \\ y_{n+1} = \dfrac{(n+2)(n-3)}{3(n+1)} y_n & \forall n \geq 1 \end{cases}$$

y_n è ben definito $\forall n$ una volta assegnato y_0 $(= y(0))$

NOTIAMO CHE, se $n=3$ TROVO

$$y_4 = 0$$

Se poi prendo $n=4$ $\Rightarrow$ $y_5 = (\quad) y_4 = 0$ $\Rightarrow$ $y_5 = 0$

- - - $\boxed{y_n = 0 \quad \forall n \geq 4}$

ALLA FINE LA SOLUZIONE È UN POLINOMIO DI GRADO 3: $y(x) = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + y_3 x^3$

dove y_0 è libero. $y_1 = -2(y_0+1)$

$y_2 =$ . . .

$y_3 =$ li ricavo da (R)

QUESTE SONO TUTTE LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DEFINITE SU $\mathbb{R}$