Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

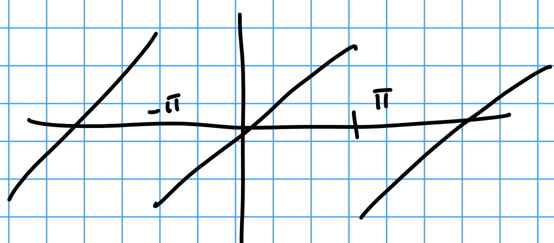
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 50 29/03/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

<u>ESEMPIO</u> Torno a $f(t) = t$ se $t \in]-\pi,\pi[$ (2π-periodica)



rifaccio il conto dei coeff. $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, e^{-int}\, dt =$ $(n \neq 0)$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{t\, e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{2\pi n i}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\, dt}_{0} = \frac{i}{2\pi n}\left(\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}\right) =$$

$$\frac{i\, 2\cos(n\pi)}{2n} = \boxed{\frac{i(-1)^n}{n} = c_n}$$ ← se $n \neq 0$ (se $n=0$ i conti fatti ma sono facili!)

$\boxed{c_0 = 0}$

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| = +\infty$ <u>MA</u> $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$ ← riflette il fatto che $\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 < +\infty$

(f ha energia finita). Da quanto visto segue

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 4\pi \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Calcoliamo l'energia:

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}$$

Se eguaglio trovo

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{2}{3}\pi^3 = \frac{\pi^2}{6}$$

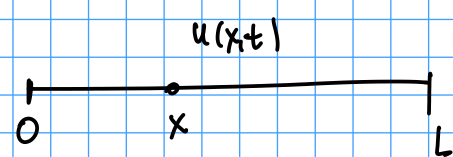
(GIA' VISTA)

Supponiamo anche che $f \underset{L^2}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ cioè:

$$\|f - f_m\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \Big| f(t) - \underbrace{\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{imkt}}_{f_m} \Big|^2 dt \xrightarrow{m \to \infty} 0$$

EQUAZIONE DEL CALORE UNIDIMENSIONALE

Ho UNA "SBARRA" OMOGENEA di lunghezza L e in ogni punto x della sbarra e ogni istante t c'è una temperatura $u(x,t)$



Se modellizzo il fenomeno (CONDUZIONE DEL CALORE) trovo la seguente equazione per u

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(+ f(x,t) \right)$$

L'eventuale termine $f(x,t)$ è una sorgente di calore (nel pto x, all'istante t). All'equazione sono aggiunte:

(a) una condizione iniziale al tempo $t = 0$:

$$u(x,0) = u_0(x)$$

dove u_0 è assegnato

(b) una condizione agli estremi: potrei considerare

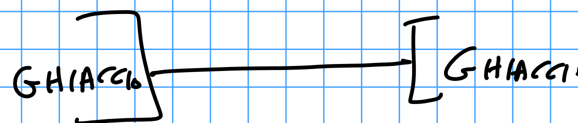
(b.1) NO SCAMBI DI CALORE AGLI ESTREMI:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

(b.2) TEMPERATURA NULLA AL BORDO

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

Posso immaginare che



CONSIDERO IL PROBLEMA con (b.2) RIASSUMENDO

$$(P)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) & 0<x<L\,,\ t>0 \\ u(x,0) = u_0(x) & 0<x<L \quad (0 \le x \le L\ ??) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t>0 \quad (t \ge 0\ ??) \end{cases}$$

NOTA Risolvo "in avanti" (per $t>0$)

IDEA Cerco la soluzione u mediante le serie di Fourier in soli seni nella variabile spaziale

$$L\omega_1 = \pi$$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin(n\omega_1 x)}$$

(sto scegliendo i seni per avere $u(0,t)=0=u(L,t)$ — se avessi messo la (b.1) userei i coseni)

Facciamo dei conti: per trovare $u_n(t)$, faccio conto che tutti i passaggi che mi servono si possono fare — poi sistemeremo lo così)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) \sin(n\omega_1 x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\, n\omega_1 \cos(n\omega_1 x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)(-n^2\omega_1^2) \sin(n\omega_1 x)$$

Supponiamo anche $f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(n\omega_1 x)$

dove deve essere $f_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(t,x)\sin(n\omega_1 x)$.

IMPONENDO CHE VALGA (E) ottengo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)\sin(n\omega_1 x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)(-n^2\omega_1^2)\sin(n\omega_1 x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin(n\omega_1 x)$$

$$\Updownarrow$$

$$u_n'(t) + n^2\omega_1^2 u_n(t) = f_n(t) \qquad \forall n \geq 1$$

Mi sono ricondotto a un'equazione ordinaria (lineare di primo grado). C'è la formula

$$u_n(t) = e^{-n^2\omega_1^2 t}\left(u_n(0) + \int_0^t f_n(s)\, e^{n^2\omega_1^2 s}\, ds\right)$$

Per andare avanti considero $f=0$. Allora:

$$u_n(t) = u_n(0)\, e^{-n^2\omega_1^2 t}$$

Suppongo anche che il profilo iniziale $u_0(x)$ sia sviluppabile

$$u_0(x) = \sum u_n \sin(n\omega_1 x)$$

dove $\boxed{u_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin(n\omega_1 x)}$

È chiaro che $u_n = u_n(0)$ e quindi

$$\boxed{u_n(t) = u_n\, e^{-n^2\omega_1^2 t}}$$ da cui

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\, e^{-n^2\omega_1^2 t}\sin(n\omega x)}$$

CANDIDATO SOLUZIONE

Bisognerebbe controllare che la u scritta sopra permetta tutti i passaggi vorrei far vedere per esempio che u è $C^2(x)$ e $C^1(t)$

FISSO $T>0$ (mi allontano un po' da $t=0$ ..)

(1) se $t \geq T$ ho

$$\| u_n e^{-\omega_1^2 n^2 t}\sin(n\omega_1 x)\|_\infty \quad \in \text{rispetto a } x \in [0,L]$$

$$\leq |u_n|\, e^{-\omega_1^2 n^2 T}$$

$\|$ derivata prima di $u_n e^{-\omega_1^2 n^2 t}\sin(n\omega_1 x)\|_\infty =$

$$\| u_n e^{-\omega_1^2 n^2 t}\, n\omega_1 \cos(n\omega_1 x)\|_\infty \leq n|u_n|\, e^{-n^2\omega_1^2 T}\,\omega_1$$

$\|$ derivata seconda $\dots$ $\|_\infty \le |u_m| \, m^2 \omega_1^2 \, e^{-\omega_1^2 m^2 T}$

Dato che $m^2 e^{-\omega_1^2 T m^2}$ è sommabile (l'esponenziale VINCE!)

$\Rightarrow$ la serie, la serie delle derivate in x, la serie delle der. II

conv. unif. $\Rightarrow$ è derivabile 2 volte in x

e $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = \sum \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} (\quad) \dots$

FINIAMO LUNEDÌ !