Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 49   28/03/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

"CONVERGENZA IN ENERGIA" ($\cdot$ e serie di Fourier)

Def. $L^2(a,b) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} / \mathbb{C} \}$ tali che f è misurabile e $\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty \}$

$f \in L^2$ si dice "a quadrato sommabile" / a energia finita

$\mathcal{E}(f) =$ energia di f $= \int_a^b |f|^2$ (metti il modulo perché se $f(x) \in \mathbb{C}$ $f(x)^2 \neq |f(x)|^2$)

Chiamerò anche $L^2_T = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} (\mathbb{C})$ T-periodiche, misurabili, $\int_0^T |f|^2 < +\infty \}$ (lo uso dopo per le serie di Fourier)

Def. Se f e $g \in L^2(a,b)$ definisco il "prodotto scalare L^2"

come $\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_0^T f(x) \overline{g(x)} \, dx$ $\left(= \int_0^T f g \text{ nel caso reale} \right)$

OSSERVO CHE $\langle f, g \rangle_{L^2}$ ha senso perché (TUTTO quello che scrivo è misurabile)

$$|f(x)\,\overline{g(x)}| \leq |f(x)|\,|g(x)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|^2 + \frac{1}{2}|g(x)|^2$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x)\,\overline{g(x)}| \leq \frac{1}{2}\left(\int_a^b |f|^2 + \int_a^b |g|^2\right) < +\infty$$

VEDO ANCHE CHE $(f,g) \to \langle f, g\rangle_{L^2}$ è <u>bilineare</u>

(nel caso complesso $\langle \lambda f, g\rangle = \lambda\langle f, g\rangle$ / $\langle f, \lambda g\rangle = \overline{\lambda}\langle f, g\rangle$

$\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$)

inoltre $\langle f, f\rangle_{L^2} = \mathcal{E}(f) = \int_a^b f\,\overline{f} = \int_a^b |f|^2$

DUNQUE ha senso (attenzione) definire

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\mathcal{E}(f)} = \sqrt{\langle f, f\rangle_{L^2}}$$

c'è un problema $\|f\|_{L^2} = 0 \iff \int_a^b |f(x)|^2\,dx = 0 \iff$

$f(x) = 0$ q.o. x di $[a,b]$

MANCA LA PROPRIETÀ $\langle f \cdot f\rangle = 0 \iff f = 0$

DEVO IDENTIFICARE TRA LORO f e g se $f(x) = g(x)$ q.o. x

TECNICAMENTE DOVREI INTRODURRE UNA REL. $\sim$ di eq.

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \text{ q.o.}$$

e (ri)definire $L^2 = \{\text{funzioni a quadrato sommabile}\}/\sim$

CON QUESTA IDENTIFICAZIONE L^2 ha un prodotto scalare

e una norma $\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}$$

(ricordiamo che la dis. triangolare segue dal teorema di Schwartz)

$$|\langle f,g\rangle_{L^2}| \le \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}$$

<u>OSS.</u> Se $f \in L^2(0,b) \Rightarrow f$ è integrabile su $[0,b]$

($[0,b]$ ha misura finita!). Infatti

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b (|f(x)|\cdot 1)\,dx = |\langle |f|, 1\rangle| \le$$

$$\|f\|_{L^2}\,\|1\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}\sqrt{b-a} \qquad \|1\|_{L^2} = \left(\int_a^b 1^2\,dx\right)^{1/2} = \sqrt{b-a}$$

$$\boxed{\int_a^b |f(x)|\,dx \le \sqrt{b-a}\left(\int_a^b |f(x)|^2\right)^{1/2}}$$

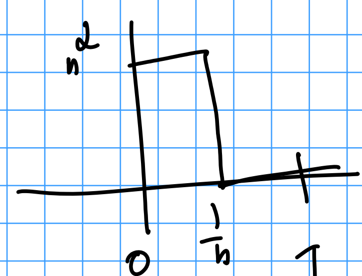
DA TUTTO QUESTO segue che posso definire la "CONVERGENZA L_2" o "CONVERGENZA IN ENERGIA".

<u>Def.</u> Se $f_n, f \in L^2(a,b)$ dico che $f_n \xrightarrow{L^2} f$ se

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$$

Questa convergenza "è più debole" della convergenza unif. dato che la distanza $\|f-g\|_{L^2}$ è <u>un integrale</u> che può essere piccolo anche se $f(x)-g(x)$ può essere grande in qualche x. PER ESEMPIO

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{fuori da } [0, 1/n] \end{cases}$$



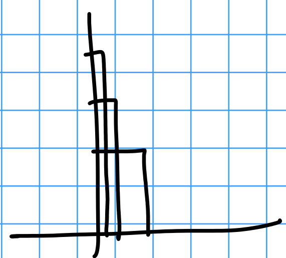
$\alpha > 0$ un parametro fissato.

Vediamo $\|f_n\|_{L^2}$ $\quad \left([a,b]=[0,1] \right)$

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_0^1 f_n(x)^2 \, dx = \int_0^{1/n} (n^\alpha)^2 \, dx = \frac{n^{2\alpha}}{n} = n^{2\alpha-1}$$

$\|f_n\|_{L^2} = n^{\alpha - \frac{1}{2}}$

SE prendo $\alpha < \frac{1}{2}$ ho $\alpha - \frac{1}{2} < 0$ e allora $\|f_n\|_{L^2} \to 0$ quando $n \to \infty$. Però $f_n(0) = n^\alpha \to +\infty$



DUNQUE $f_n \xrightarrow{L^2} 0$

(nonostante $f_n(0) \to +\infty$)

Dall'esempio si vede che se $f_n \xrightarrow{L^2} f$ non è detto neanche che $f_n \to f$ PUNTUALMENTE

[SI PUÒ DIM: Se $f_n \xrightarrow{L^2} f$ esiste una sottosucc. f_{n_k} tale che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ per q.o. x]

VICEVERSA: se $f_n \to f$ UNIF. su $[a,b]$ $\Rightarrow$ $f_n \xrightarrow{L^2} f$

(perché $f_n^2 \to f^2$ UNIF. da cui si può scambiare limite e integrale . .)

QUELLO CHE SI SCOPRE È CHE LA CONVERGENZA L^2 VA PERFETTAMENTE D'ACCORDO CON LE SERIE DI FOURIER.

VEDIAMO IL CASO COMPLESSO (più conciso da scrivere . .)

$L^2_T = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, misurabili, T-periodiche, $\int_0^T |f(x)|^2 dx < +\infty \}$

IN L^2_T considero $\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_0^T f(x) \overline{g(x)} \, dx$

e la norma $\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^T |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

Prendiamo una f in L^2_T. Dato che $f \in L_T$ posso considerare i c_n:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\langle f, e_n\rangle$$

e le somme parziali:

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega t}$$

"DIMOSTREREMO" CHE $f_n \xrightarrow{L^2} f$ (senza altre ipotesi!)

per ogni f a energia finita (T periodica) $\quad f \underset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$

(QUANDO SCRIVO $h \underset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n$ intendo $\sum_{n=-k}^{k} h_n \xrightarrow{L^2} h$)

VEDIAMO ALCUNI PASSAGGI (che fanno capire delle idee importanti)

(0) Indico con e_n la funzione $e_n(t) = e^{in\omega t}$ ($\overline{e_n} = e^{-in\omega t}$!!)

(1) Dato n considero il sottospazio E_n definito da:

$$E_n = \left\{ \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e_k \quad \text{per } \lambda_{-k}\dots\lambda_0\dots\lambda_k \in \mathbb{C} \right\} \subset L^2_T$$

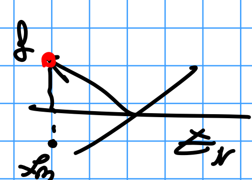
= spazio generato da $e_{-k}\dots e_0\dots e_k$ $\quad$ ($e_0(t) = 1 \ \forall t$)

· INOLTRE se $f \in L^2_T$ pongo $f_n = \dots$ quella sopra

NOTO SUBITO CHE $f_n \in E_n$. Inoltre VALE:

(*) $\forall g \in E_n \quad \langle f - f_n, g\rangle_{L^2} = 0$

f_n è la proiezione ortog. di f su E_n !!



Basta dimostrarlo se $g = e_j$ con $-n \leq j \leq n$ (e poi si usa la linearità). Facciamo il conto

$$\langle f - f_n, e_j \rangle = \langle f, e_j \rangle - \langle f_n, e_j \rangle =$$

$$\langle f, e_j \rangle - \left\langle \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k, e_j \right\rangle = \langle f, e_j \rangle - \sum_{k=-n}^{n} c_k \langle e_k, e_j \rangle$$

(OSSERVO CHE $\langle e_k, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j \\ T & \text{se } k = j \end{cases}$ (conti già fatti rivisti usando $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$)

gli e_i sono ORTOGONALI

$$= \langle f, e_j \rangle - c_j T$$ (tutti gli addendi sono nulli tranne il j-esimo che fa T)

$$= \langle f, e_j \rangle - \frac{1}{T} \langle f, e_j \rangle \cdot T = 0$$

RISCRIVO QUELLO CHE HO TROVATO

$$(*) \quad \langle f - f_n, g \rangle = 0 \quad \forall g \in E_n$$

$$f_n \in E_n$$

Facciamo un altro conto: Dato $g \in E_n$

$$\|f - g\|^2_{L^2} = \|f - f_n + f_n - g\|^2_{L^2} = \|f - f_n\|^2_{L^2} + \underbrace{2\langle f - f_n, \underbrace{f_n - g}_{\in E_n} \rangle_{L^2}}_{=0} + \|f_n - g\|^2_{L^2}$$

($a \cdot b = 0 \Rightarrow \|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$)

$$(**) \quad \|f - g\|^2_{L^2} = \|f - f_n\|^2_{L^2} + \|f_n - g\|^2_{L^2}$$

Ne segue che $\|f - g\|^2_{L^2} \geq \|f - f_n\|^2_{L^2}$ per ogni $g \in E_n$

e se prendo $g = f_n$ ho l'eguaglianza. DUNQUE

$$\|f - f_n\|^2_{L^2} = \min_{g \in E_n} \|f - g\|^2_{L^2}$$

f_n è il punto di E_n di minima distanza da f

Terzo calcolo (uso sempre l'ortonormalità degli e_i)

$$\|f_n\|^2 = \langle f_n, f_n \rangle = \left\langle \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k , \sum_{h=-n}^{n} c_h e_h \right\rangle =$$

$$\sum_{k,h=-n}^{n} c_k \overline{c_h} \underbrace{\langle e_k e_h \rangle}_{\substack{0 \text{ se } k \neq h \\ T \text{ se } k = h}} = \sum_{k=-n}^{n} c_k \overline{c_k}\, T = T \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

($\cdot$ $\|f\|^2$ = somma delle norme $\|c_k e_k\|^2$ perché la "base" è ortogonale)

- Se metto $g = 0$ in $(**)$

$$\|f\|_{L^2}^2 = \|f - f_n\|_{L^2}^2 + \|f_n\|_{L^2}^2 .$$

$$\Leftrightarrow \cancel{(***)} \quad \|f\|_{L^2}^2 = \|f - f_n\|_{L^2}^2 + T \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \geq T \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

NE SEGUE: Se $f \in L^2_T \Rightarrow T \sum_{h=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|_{L^2}^2 < +\infty$

f a quadrato sommabile $\Rightarrow$ la serie dei quadrati dei coeff è convergente

e vale la DISUGUAGLIANZA DI PARCEVAL

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \|f\|_{L^2}^2$$

DA $(***)$ segue anche che

$$\|f_n - f\|_{L^2}^2 \to 0 \iff \underbrace{\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T} \|f\|_{L^2}^2}$$

IN ALTRI TERMINI SONO EQUIVALENTI

$f_n \xrightarrow{L^2} f$ e EGUAGLIANZA DI PARCEVAL

Per concludere manca il fatto che gli e_n generano tutto L^2_T

QUESTO SI PUÒ DIMOSTRARE e se ne deduce

che per ogni $f \in L^2$ vale l'eguaglianza di Parceval

DUNQUE HO FATTO VEDERE

Teorema ① Se $f \in L^2_T$, definiti i $c_n = \frac{1}{T} \langle f, e_n \rangle$

e $f_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$ si ha:

$$f_n \xrightarrow{L^2} f \quad ; \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt$$

VALE ANCHE IL "VICEVERSA"

Teorema ② Si data una "successione" $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in $\mathbb{C}$ tale che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty \quad ; \quad \text{Posto} \quad f_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$$

esiste $f \in L^2_T$ tale che $f_n \xrightarrow{L^2} f$, $\|f\|^2_{L^2} = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$

e vale la relazione $\langle f, e_n \rangle = T c_n$ (i c_n sono i coeff. di Fourier della f trovata)

Sarebbe interessante vedere cosa succede se nel problema

$$y'' + \alpha y = f \qquad y(0) = y(L) = 0 \qquad \text{prendo } f \in L^2$$