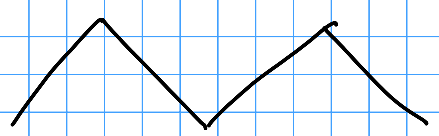
Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

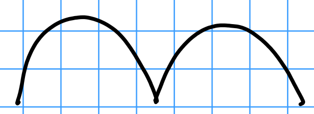
# Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

## Lezione 48 27/03/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email





coeff. $\simeq \dfrac{1}{n^2}$ (conv. unif. della serie ma non della serie delle derivate

ESEMPIO


$$f(t) = \begin{cases} t(\pi - t) & \text{se } 0 \le t \le \pi \\ t(\pi + t) & \text{se } -\pi \le t \le 0 \end{cases}$$

(estesa a una $2\pi$-periodica)

Si vede che $f$ è dispari: $f(-t) = -f(t)$

$a_n = 0 \quad \forall n$ mentre

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)\sin(nt)\,dt =$$

(per parti)

$$= \frac{2}{\pi}\left[\overbrace{t(\pi - t)}^{\text{FA ZERO IN } t=0,\ t=\pi}\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(\pi - 2t)\cos(nt)\,dt =$$

$$(\text{per parti}) = \frac{2}{n\pi}\Big[\underbrace{(\pi-2t)\frac{\sin(nt)}{n}}_{=0 \text{ in } 0,\pi}\Big]_0^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi}(-2)\sin(nt)\,dt =$$

$$\frac{4}{n^2\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n^3}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & n=2k \\ \dfrac{8}{\pi(2k+1)^3} & n=2k+1 \end{cases}$$

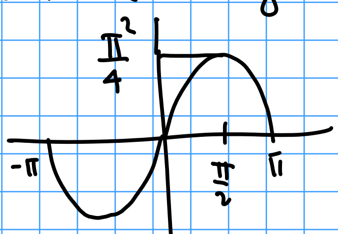
POSSO NOTARE CHE $|b_n| \leq \frac{8}{\pi}\frac{1}{n^3} \Rightarrow \sum |b_n| < +\infty, \sum n|b_n| < +\infty$

da cui la serie di F, e la corrispondente serie delle derivate convergono unif. a $f$ / $f'$. SI HA

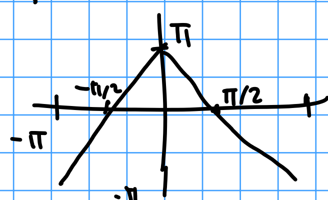
$$f(t) \underset{(\text{UNIF.})}{=} \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin((2k+1)t)$$

$$f'(t) \underset{\text{UNIF.}}{=} \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)t)$$

NOTA che $f'(t) = \begin{cases} \pi-2t & 0\leq t\leq\pi \\ \pi+2t & -\pi\leq t\leq \pi \end{cases} = \pi - 2|t|$




$f$




$$\left(t(\pi-t) \xrightarrow{t=\pi/2} \frac{\pi^2}{4}\right)$$

Metto $t=\frac{\pi}{2}$ trovo $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$ da cui

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

$$\left(\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\sin(k\pi)\cos(\pi/2)}_{=0} + \underbrace{\cos(k\pi)\sin(\pi/2)}_{=(-1)^k}\right)$$

DUNQUE $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

VERSIONE "SPAZIALE" DELLA SERIE. SIA $L>0$

Dato una funzione $f:[0,L]\to\mathbb{R}$ mi chiedo se posso sviluppare $f$ in una serie "di soli seni / coseni"

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\omega_1 x)$$

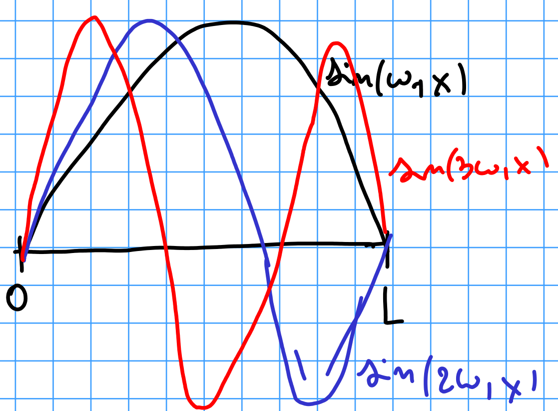
$$\boxed{\omega_1=\frac{\pi}{L}\ (\omega_1 L=\pi)}$$

OPPURE $$f(x)=v_0+\sum_{n=1}^{\infty} v_n\cos(n\omega_1 x)$$

$\left(\text{NON } \frac{2\pi}{L}\right)$

Noto che $\sin(n\omega_1 x)$ sono tutti nulli in $x=0$, $x=L$ perché $\sin(n\omega_1 L)=\sin(n\pi)=0$

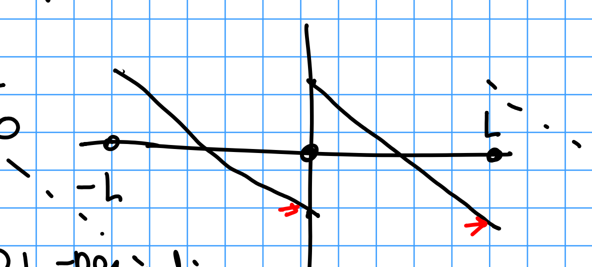
MENTRE i $\cos(n\omega_1 x)$ hanno DERIVATA NULLA IN $x=0$, $x=L$




VEDIAMO COSA SI PUÒ FARE.

PARTO DA UNA FUNZIONE $f:[0,L]\to\mathbb{R}$ e la estendo a $[-L,0]$ in modo dispari: definisco $\tilde f:[-L,L]\to\mathbb{R}$

$$\tilde f(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se } 0<x<L \\ 0 & \text{se } x=0,L,-L \\ -f(-x) & \text{se } -L<x<0 \end{cases}$$




e poi estendo $\tilde f$ a tutto $\mathbb{R}$ in modo $2L$-periodico

$\left(\tilde f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ 2L\text{-periodica, dispari } \tilde f=f \text{ su } ]0,L[\right)$

Considero i coeff di F. per $\tilde f$ $a_n=0$ mentre

$$b_n = \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(t)\sin(n\,\omega\, t)\,dt \qquad \omega = \frac{2\pi}{2L} = \omega_1$$

$$= \frac{1}{L}\, 2\int_{0}^{L} \tilde{f}(t)\sin(n\omega_1 t)\,dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin(n\omega_1 x)\,dx$$

LO CHIAMO $u_n$

$$\boxed{u_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin(n\omega_1 x)\,dx}$$

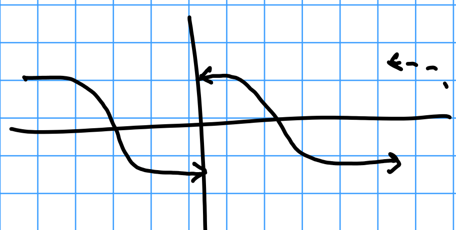
Se $f$ è $C^1$ a tratti su $[0,L]$ $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ è $C^1$ a tratti su $\mathbb{R}$ e si ha: (per quanto già detto)

$$\boxed{\frac{\tilde{f}(x^+)+\tilde{f}(x^-)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\omega_1 x)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

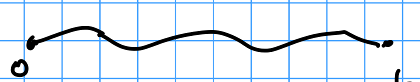
IN PARTICOLARE se $t \in [0,L]$

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\omega_1 x) \qquad \forall x \in [0,L]$$

CON L'AVVERTENZA che $f(0^-) = -f(0^+)$ $\quad f(L^+) = -f(L^-)$



e dunque se $x = 0, L$ LA SERIE FA <u>ZERO</u>



<u>VICEVERSA</u> supponiamo di avere una succ. $(u_n)$ di numeri reali e di considerare $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\omega_1 x)$

SI DIMOSTRA (costruendo la $\tilde{f}$ ...)

Se $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < +\infty$ allora la serie converge uniformemente su $[0, L]$ a una funzione $f$ CONTINUA e NULLA AL BORDO ($f(0) = f(L) = 0$)

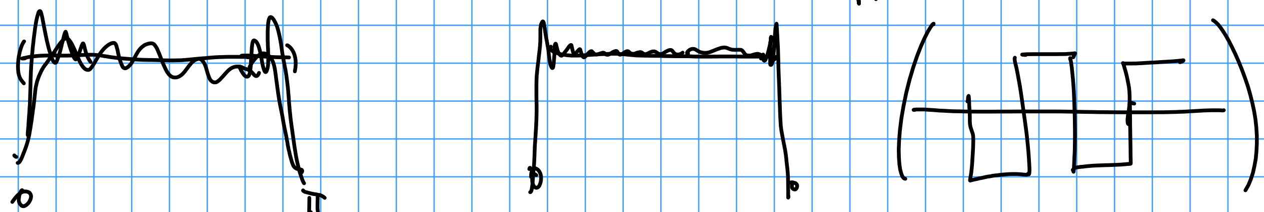
Se $\sum_{n=1}^{\infty} n^k |u_n| < +\infty \Rightarrow f$ è di classe $C^k$ e le derivate di $f$ sono somma (UNIFORME) delle serie delle derivate (da 1 a $k$)

ESEMPIO $\quad f(x) = 1$ su $[0, \pi]$ $\quad (L = \pi)$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{\pi} = 1 \quad , \quad u_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{2}{n\pi} \left(1 - (-1)^n\right)$$

Vedo che gli $u_n \simeq \frac{1}{n}$, l'approssimazione è brutta.

In effetti i $\sin(nx)$ fanno fatica ad approssimare vicino a zero



IN MANIERA ANALOGA, data $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ posso definire

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le L \\ f(-x) & -L < x \le 0 \end{cases} \quad \text{(PARI)}$$

ed esteso in modo $2L$-periodico a tutto $\mathbb{R}$.

Allora se sviluppo $f^*$ in serie di F. ho $b_n = 0$ mentre

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\, dx = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx$$

$\uparrow$
$v_0$

$a_n = \cdot \cdot \cdot = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\omega_1 x)\,dx$

$\downarrow$ $v_n$

Decido di chiamarli $v_n$. SI HA

- Se $f$ è $C^1$ a tratti $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n\omega_1 x) + v_0$

- Se viceversa $(v_n)$ è data tale che $\sum |v_n| < +\infty \Rightarrow$

esiste $f(x) \underset{(UNIF)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n\omega_1 x) + v_0$

inoltre se $\sum n^k |v_n| < +\infty \Rightarrow f$ è $C^k$,

le serie delle derivate (da 1 a $k$) convergono unif alle derivate di $f$.

INOLTRE tutte le derivate di ordine dispari SONO NULLE IN $x=0$, $x=L$

(questo è vero anche nel caso dei seni:

Se $\sum |u_n| n^k < +\infty$ $f(x) = \sum u_n \sin(n\omega_1 x)$ è $C^k$

e tutte le derivate pari (a partire dalla $f = f^{(0)}$) sono nulle in $x=0$, $x=L$.)

ALLA FINE, UNA FUNZIONE DEFINITA SU $[0,L]$

la posso sviluppare in (almeno) TRE MODI:

- $f(x) = a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + \sum b_n \sin(n\omega x)$

$\omega = \frac{2\pi}{L}$ $(a_n, b_n \ldots)$

- $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\omega_1 x)$ $\omega_1 = \frac{\pi}{L}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n\omega_1 x) + v_0 \quad , \quad \omega_1 = \frac{\pi}{L}$$

ESEMPIO DI APPLICAZIONE DI QUESTE SERIE A PROBLEMI DIFFERENZIALI <u>CON DATI AL BORDO</u>

<u>L'esempio è molto semplice</u>. Dato $a > 0$ e una $f(x)$

$$\begin{cases} y'' + a y = f(x) & 0 \le x \le L \\ y(0) = y(L) = 0 & \leftarrow \text{COND. AL BORDO} \end{cases}$$

Cerco una soluzione $y(x)$ della forma $\boxed{y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\omega_1 x)}$

(serie in soli seni) $\omega_1 = \frac{\pi}{L}$. <u>FARÒ L'IPOTESI</u>

che il dato $f(x)$ abbia uno sviluppo del genere:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(n\omega_1 x) \qquad x \in [0, L]$$

$$\left( f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\omega_1 x) \right)$$

Per capire come andare avanti facciamo finta che si possa derivare per serie:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \, n\omega_1 \cos(n\omega_1 x)$$

$$y''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} u_n \, n^2 \omega_1^2 \sin(n\omega_1 x)$$

e dunque, se impongo che valga l'equazione, trovo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big( \underbrace{-n^2\omega_1^2 u_n}_{y''} + \underbrace{a u_n}_{ay} - \underbrace{f_n}_{f} \Big) \sin(n\omega_1 x) = 0$$

Questa eguaglianza diventa vera se (e solo se...)

$$(-m^2\omega_1^2 + a)u_m = f_m \qquad \forall\, m = 1 \dots$$

$$\underset{\sim\sim}{\Longleftrightarrow} \qquad u_m = \frac{f_m}{a - n^2\omega_1^2} \qquad \text{(attenzione a dividere per zero)}$$

Ho trovato gli $u_n$ e allora posso cercare di capire se

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{a - n^2\omega_1^2}\sin(n\omega_1 x)$$

è effettivamente una soluzione..

SUPPONIAMO $\underline{\text{(CASO 1)}}$ che $\underline{m^2\omega_1^2 \neq a}$ $\forall m$

( quasi tutti gli $a > 0$ vanno bene tranne una succ. di valori singolari $\omega_1^2,\ 4\omega_1^2,\ 9\omega_1^2 \dots$ ).

$\forall m$ posso prendere $\boxed{u_m = \dfrac{f_n}{a - m^2\omega_1^2}}$

· Supponiamo che $\sum |f_n| < +\infty$ ( dunque $f$ è cont. e $f(0) = f(L) = 0$ ! ed è somma unif. di $\sum f_n \sin(n\omega_1 x)$ ) (IPOTESI SUL DATO $f$)

ALLORA $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{m^2 |u_m|} < \infty$ perché ho $\left| \dfrac{m^2 |f_n|}{a - n^2\omega_1^2} \right| \leq \text{cost} |f_n|$

$$\Longrightarrow \qquad y(x) := \sum_1^{\infty} u_n \sin(n\omega_1 x) \quad \text{è } \underline{\underline{C^2}}$$

e le derivate 1, 2 sono somme unif delle serie rispettive

( CIOÈ SI POSSONO FARE I PASSAGGI SOPRA ) $\Longrightarrow$

$$y'' + a y = f$$

MI MANCA LA COND. AL BORDO. **AUTOMATICA**

perché ho $\sum_1^{\infty} |u_n| < +\infty \Rightarrow y$ è continua, $y(0) = y(L) = 0$

MI SONO MESSO IN UNA CLASSE DI FUNZIONI CHE sono destinate a essere nulle al bordo

---

COSA SUCCEDE SE $\boxed{a = n_0^2 \omega_1^2}$ per $n_0 \in \mathbb{N}$ ?

Quando metto $n = n_0$ in ↓

$$\left(-n^2 \omega_1^2 + a\right) u_n = f_n \qquad \forall n = 1 \ldots$$

Trovo $0 = f_{n_0}$

QUESTO MI DICE CHE se $f_{n_0} \neq 0$ NON CI SONO SOLUZIONI (con quella $f$) se invece $f_{n_0} = 0$ qualunque $u_{n_0}$ VA BENE. DUNQUE HO "UN TEOR. DI ALTERNATIVA"

se $f_{n_0} \neq 0$ NO SOL

se $f_{n_0} = 0$ $\quad y(x) = \alpha \sin(n_0 \omega_1 x) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \frac{f_n}{a - n^2\omega_1^2} \sin(n\omega_1 x)$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ qualunque

(ho una famiglia a un parametro di soluzioni)

---

Nello stesso modo posso risolvere "per serie"

$$\begin{cases} y'' - a y = f \\ y'(0) = y'(L) = 0 \end{cases}$$

cercando $y(x) = v_0 + \sum_{n \geq 1}^{\infty} v_n \cos(n\omega_1 x)$

Servirà supporre $f = f_0 + \sum_1^{\infty} f_n \cos(n\omega_1 x)$ e $\sum |f_n| < +\infty$

---

OSS. Ho IPOTIZZATO (nel caso con condizioni $u=0$)

che $\sum |f_n| < +\infty$ da cui $f(0) = f(L) = 0$

Potrei provare a indebolire queste ipotesi. Si può fare e si ottiene che $y(x) = \sum_1^{\infty} \frac{u_n}{a - n^2\omega_1} \sin(n\omega_1)$

sono "soluzioni generalizzate"

. . . . .