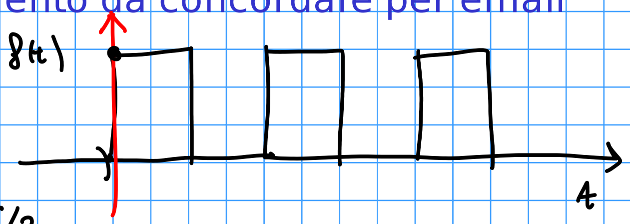
Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 46 21/03/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

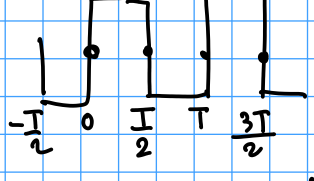


$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < T/2 \\ 0 & \frac{T}{2} \le t < T \end{cases} \qquad \text{(periodicizzata di periodo } T\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 0 \\ \frac{i}{2\pi n}\left((-1)^n - 1\right) & n \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 0 \\ 0 & n \text{ pari} \\ \frac{-2i}{2\pi n} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Siccome f è (chiaramente) C^1 a tratti ho l'eguaglianza

$$f(t) = \frac{1}{2} - \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{i}{\pi(2k+1)} e^{i(2k+1)\omega t}}_{} \qquad \text{se } t \neq m\frac{T}{2}$$



se $t = mT$ questa fa zero (dunque la serie fa $\frac{1}{2}$)

$$\left(\frac{1}{2} = \frac{f\left(\frac{T}{2}^+\right) + f\left(\frac{T}{2}^-\right)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \right)$$

Vediamo cosa mi da la serie se $t = m\frac{T}{2}$. Il termine $e^{i(2k+1)\omega t}$ diventa

$$e^{i(2k+1)m\pi} = \underbrace{e^{ikm2\pi}}_{=1} e^{im\pi} = e^{im\pi} \qquad (\omega T = 2\pi)$$

DUNQUE se metto $t = m\frac{T}{2}$ trovo

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i}\frac{1}{\pi(2k+1)} e^{im\pi} = \frac{1}{2} + e^{im\pi}\frac{1}{\pi i}\cdot \sum_{\substack{n=-\infty \\ m \text{ dispari} \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

FA ZERO perché ogni termine ha il suo opposto

QUI BISOGNEREBBE SPIEGARE BENE COSA INTENDIAMO CON LA SERIE da $-\infty$ a $+\infty$. IN EFFETTI si intende

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=-k}^{k} a_n$$

(che è diverso da fare separatamente $\sum_{-\infty}^{-1} a_n + a_0 + \sum_{1}^{+\infty} a_n$)

È IN QUESTO SENSO che vale il teorema per le funzioni C^1 a tratti. CON QUESTA DEF. HO $\sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} = 0$

mentre $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} + \infty$ $\sum_{-\infty}^{-1} \frac{1}{n} = -\infty$

DUNQUE SI VEDE che in $t = m\frac{T}{2}$ la serie dà risultato $\frac{1}{2}$.

Mettiamo $t = \frac{T}{4}$. So che $\frac{\omega T}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$1 = f\left(\frac{T}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{i\pi} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \text{ DISPARI} \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{in\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{i\pi} \sum_{\substack{m=1 \\ n \text{ DISPARI}}}^{\infty} \left(\frac{1}{n} e^{in\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{-n} e^{-in\frac{\pi}{2}}\right)$$ (ho messo insieme n e $-n$)

$\sin(n\pi/2)$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n\geq 1 \text{ DISPARI}} \frac{1}{n}\left(\frac{e^{in\frac{\pi}{2}} - e^{-in\frac{\pi}{2}}}{2i}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(k\pi)\cdot 1 + 0 = (-1)^k$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}}\quad (= 1) \qquad \text{Ricavo}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} \quad \leftarrow \text{HO TROVATO LA SOMMA DI QUESTA SERIE!!}$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

PROPRIETÀ RISPETTO ALLE SIMMETRIE

Data $f \in L_T$ (a meno di quasi ovunque ...)

- f è pari $\iff$ c_n sono pari
- f è dispari $\iff$ c_n sono dispari

Dim. Faccio le implicazioni $\Rightarrow$.

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}$$

OSSERVO che invece di integrare su $[0,T]$ posso integrare su $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t}. \qquad \text{Allora } c_{-n} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{in\omega t}\, dt$$

cambio di variabile $s = -t$ $\quad ds = -dt$ $\quad$ da cui

$$c_{-n} = \frac{1}{T}\int_{T/2}^{-T/2} f(-s)\, e^{-in\omega s}(-ds) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(-s)\, e^{-in\omega s}\, ds$$

se f è pari $\quad f(-s) = f(s) \Rightarrow c_{-n} = c_n$

se f è dispari $\quad f(-s) = -f(s) \Rightarrow c_{-n} = -c_n$

RIGUARDO a $\Leftarrow$ vediamo per es. il caso PARI $\quad c_{-n} = c_n$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \underbrace{\left(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}\right)}_{\text{PARI RISPETTO A } t} \quad \left(= c_0 + \sum c_n 2\cos(n\omega t)\right)$$

ADESSO se so che $f(t) =$ serie ne deduco che f è pari. Per esempio se f è C^1 a tratti ho dimostrato la tesi. IN REALTÀ (a meno di q.o.) la tesi è VERA ma la dim. è complicata

- f è reale $\iff$ $\overline{c_n} = c_{-n}$

Infatti se f è reale: $\overline{c_n} = \overline{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt} =$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \overline{f(t)\, e^{-in\omega t}}\, dt \underset{(f \text{ reale!})}{=} \frac{1}{T}\int_{-T/2} f(t)\, \overline{e^{-in\omega t}}\, dt = \quad \left(\overline{\int z} = \int \overline{z} \text{ se } d\in\mathbb{R}\right)$$

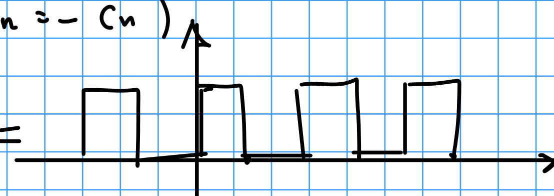
$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{in\omega t}\, dt = c_{-n}$$

Per il $\Leftarrow$ si vede come prima nel caso f reg. a tratti - se no ci si fida!.

- COMBINANDO LE COSE:

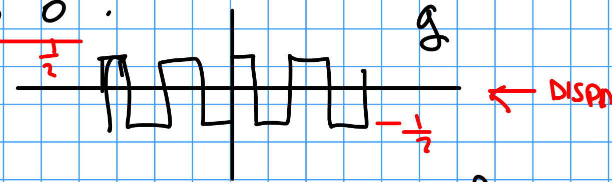
  f reale pari $\iff$ c_n sono reali pari ($c_n = c_{-n} = \overline{c_n}$)

  f reale dispari $\iff$ c_n sono immaginari puri dispari ($c_n = -c_{-n} = -\overline{c_n}$)

Se torniamo al primo esempio $f(t) =$ 

si vede $\quad c_n = \frac{i}{2\pi n}\left((-1)^n - 1\right) \qquad c_0 = \frac{1}{2}$

Se prendo $f - \frac{1}{2} = g$ allora g è dispari e i suoi c_n sono gli stessi di f tranne c_0 che vale 0.



Se guardo i c_n vedo che sono immaginari puri e che

$$c_{-n} = \frac{i}{-n}\left((-1)^{-n} - 1\right) = -\frac{i}{n}\left((-1)^n - 1\right) = -c_n$$

TORNA

Sempre riguardo all'esempio (su f) possiamo notare che

$$|c_n| = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{2}{\pi n} & \end{cases} \qquad \left(\text{a parte } c_0 = \tfrac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow \quad \sum |c_n| = +\infty \qquad$ NON POTEVA ESSERE ALTRIMENTI DATO CHE f è DISCONTINUA

(se $\sum |c_n| < +\infty \Rightarrow$ la serie conv. unif $\Rightarrow$ f continua)

VERSIONE REALE. Suppongo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in L_T

Abbiamo visto che $\overline{c_n} = c_{-n}$. In particolare $\overline{c_0} = c_0 \iff c_0 \in \mathbb{R}$

Allora
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}\right)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} + \overline{c_n}\,\overline{e^{in\omega t}} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(c_n e^{in\omega t}\right) =$$

(Supponiamo $c_n = \alpha_n + i\beta_n \qquad \alpha_n = \mathrm{Re}(c_n) \qquad \beta_n = \mathrm{Im}(c_n)$)

$$= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left((\alpha_n + i\beta_n)\left(\cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t)\right)\right) =$$

$$\underset{a_0}{\alpha_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{2\alpha_n}_{a_n}\cos(n\omega t)\underbrace{-2\beta_n}_{b_n}\sin(n\omega t)\right) =$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

dove $a_0 = c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$ (la media di f)

$n \geq 1$ $\quad a_n = 2\alpha_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-in\omega t}\,dt\right) =$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T \mathrm{Re}\left(f(t)\,e^{-in\omega t}\right)dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

il meno si può togliere

$$b_n = -2\beta_n = -\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{Im}\left(e^{-in\omega t}\right)dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$, $\quad n \geq 1$ $\quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)$, $\quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$

($a_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n)$, $b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n)$) $\qquad$ $\alpha \in \mathbb{R}$ $\left(\mathrm{Im}(\alpha z) = \alpha\,\mathrm{Im}\,z\right)$

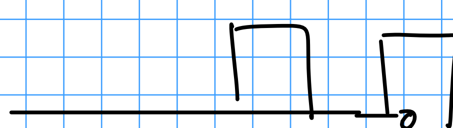
TORNANDO all'onda quadra posso fare i conti "reali"

$a_0 = c_0 = \frac{1}{2}$ $\qquad$ se $n \geq 1$ $\quad a_n = 2\,\mathrm{Re}\,c_n = 0$

$$b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n) = -2\,\mathrm{Im}\left(\frac{i}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)\right) =$$

$$\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{2\,n\pi} = \begin{cases} 0 & n \text{ PARI} \\ \frac{2}{n\pi} & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

e quindi $\quad f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ DISPARI}}}^{\infty} \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{n}\sin(n\omega t)$



QUI POSSO FARE (in modo PIÙ TRASPARENTE) i conti di prima

$t = m\frac{T}{2}$ la serie restituisce $1/2$ (la sommatoria fa zero)

e se $t = \frac{T}{4}$ trovo

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin((2k+1)\omega T/4)}{(2k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$$ come prima

---

TEORIA NELLA VERSIONE REALE.

Data $f \in L_T$ reale posso definire i coeff di F. reali:

$$\circledast \quad a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \,, \quad n \geq 1 \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt \,, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

(si può anche integrare (per es.) tra $-\frac{T}{2}$ e $\frac{T}{2}$)

Teor. Se f è C^1 a tratti allora la serie di F.

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$$ converge puntualmente a $$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

VICEVERSA se sono date (a_n) e (b_n) posso considerare la "serie trigonometrica reale"

$$(1) \quad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$$

se $\sum |a_n| < +\infty$ e $\sum |b_n|$ allora la serie converge uniformemente a una funzione f (T-periodica e continua) tale che a_n e b_n sono i coeff. di Fourier di f. (vedi $\circledast$)
Se inoltre $\sum n^k |a_n| < +\infty$ e $\sum n^k |b_n| < +\infty$ allora f è C^k, le serie delle derivate della serie (1) conv. unif alle derivate $f', f'' .. f^{(k)}$

OSS. Se partiamo da f e calcoliamo i coeff. possiamo poi guardare la sommabilità dei coeff per vedere se c'è conv. unif (della serie e delle derivate)

- Nella forma reale si ha

  f PARI $\iff b_n = 0 \quad \forall n$

  f DISPARI $\iff a_n = 0 \quad \forall n$