Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 45 20/03/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Serie di Fourier: IDEA scomporre un segnale periodico in una somma di "armoniche", cioè di "funzioni periodiche elementari"

Def. Dato $T>0$ e dato $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ($f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$) dico che f è T-periodica se $f(x+T)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

OSS Se f è T-periodica e $K\in\mathbb{N} \Rightarrow f$ è KT periodica

$$f(x+KT)=f(x+\underbrace{T+T+\cdots+T}_{K})=f(x+\underbrace{T+\cdots T}_{K-1})\overset{\text{app. } K \text{ volte}}{=}\cdots=f(x)$$

Dunque se dico che f è T-periodica non è detto che T sia "IL PERIODO MINIMO".

Def. $L_T := \{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(f:\mathbb{R}\to\mathbb{C})$: f è misurabile, f T-periodica, $\int_0^T |f(t)|\,dt < +\infty \}$

(funzioni T periodiche integrabili (secondo L.) su $[0,T]$)

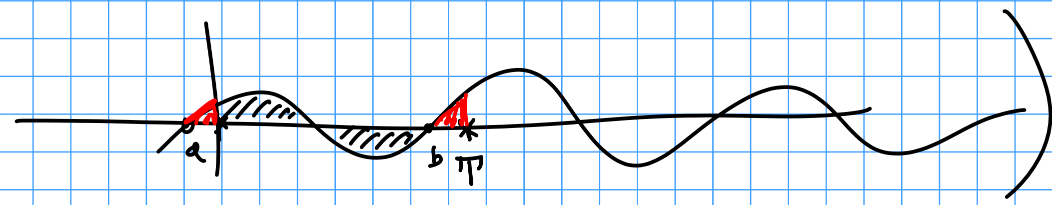
OSS. Supponiamo, f sia T-periodica e misurabile.
Allora

$$\int_0^T |f(t)|\,dt < +\infty \iff \int_a^b |f(t)|\,dt < +\infty \quad \text{se } b-a=T$$

(invece di integrare tra 0 e T posso integrare su un qualunque intervallo di lunghezza T). Inoltre se $f \in L_T$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt \quad \text{quando } b-a=T$$

(Lo dimostro seguendo le idee della figura



Sia $T>0$. Sia data $f \in L_T$. Definisco $\omega = \frac{2\pi}{T}$

VORREI POTER SCRIVERE (ω frequenza angolare)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

Per opportuni a_n e b_n in $\mathbb{R}$.

(NOTA CHE $\sin(n\omega t)$ e $\cos(n\omega t)$ son tutte T-periodiche (ognuna è $\frac{T}{n}$ periodica $\Rightarrow$ è anche T-periodica)

ANALOGAMENTE, se f è a valori in $\mathbb{C}$, vorrei scrivere

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \underbrace{e^{in\omega t}}_{\text{periodica di periodo } T} \left(= \sum_{-\infty}^{-1} + c_0 + \sum_{1}^{\infty} \right)$$

per opportunini $c_n \in \mathbb{C}$ (Versione complessa)

PARENTESI Dati $n, m \in \mathbb{Z}$ calcoliamo

$$\int_0^T \left(e^{in\omega t} e^{-im\omega t}\right) dt = \int_0^T e^{i(n-m)\omega t}\, dt = \begin{cases} & n=m \\ & n\neq m \end{cases}$$

CASO $n \neq m$ tra $\left[\frac{e^{i(n-m)\omega t}}{i(n-m)\omega}\right]_0^T = \frac{e^{i(n-m)\omega T}-1}{i(n-m)\omega} =$

$$\frac{e^{i(n-m)2\pi}-1}{i(n-m)\omega} = \frac{1-1}{\sim} = 0$$

CASO $n = m$ tra $\int_0^T e^0 \, dt = T$. DUNQUE

$$\boxed{\int_0^T e^{in\omega t} e^{-im\omega t} \, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ T & \text{se } n = m \end{cases}}$$

TORNIAMO A:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

Supponiamo che questa formula valga. Fissiamo $\boxed{m \in \mathbb{Z}}$, moltiplichiamo l'uguaglianza per $e^{-im\omega t}$ e integriamo tra 0 e T. Troviamo

$$\int_0^T f(t) e^{-im\omega t} \, dt = \int_0^T \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \right) e^{-im\omega t} \, dt$$

Supponiamo anche che si possa scambiare integrale e serie. Allora

$$\int_0^T f(t) e^{-im\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^T c_n \underbrace{e^{in\omega t} e^{-im\omega t}}_{\substack{=0 \text{ se } n \neq m \\ =T \text{ se } n = m}} \, dt$$

resta solo il termine m-esimo

$$= c_m T$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-im\omega t} \, dt} \quad \leftarrow$$

c_n definiti così si chiamano coeff. di Fourier complessi di ordine n.

Dunque il problema iniziale diventa

$$\underbrace{f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}}$$ DOVE i (c_n) sono quelli definiti SOPRA

(in particolare $c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) =$ media di f su $[0,T]$).

OSS. Per definire i (c_n) basta che $f \in L_T$ dato che

$$\left| f(t) e^{-in\omega t} \right| = |f(t)|$$

($e^{-in\omega t}$ è circonferenza unitaria, $|e^{-in\omega t}| = 1 \ \forall t$)

PER DEFINIRE i (c_n) BASTA $|f|$ integrabile ($f \in L_T$)

PROP. Se $f \in L_T \Rightarrow c_n \to 0$ per $n \to \infty$

(NO DIM.)

TEOREMA Se f è "C^1 A TRATTI" allora si ha

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \quad \left(= f(t) \text{ se } f \text{ è continua in } t \right)$$

DOVE: C^1 a tratti significa che posso dividere $[0,T]$ in k sottointervalli $[0, t_1]\ [t_1\ t_2] \cdots [t_{k-1}, b]$

(introduco $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$)

tali che f è C^1 su ogni $]t_{i-1}, t_i[$ $(i = 1 \ldots k)$

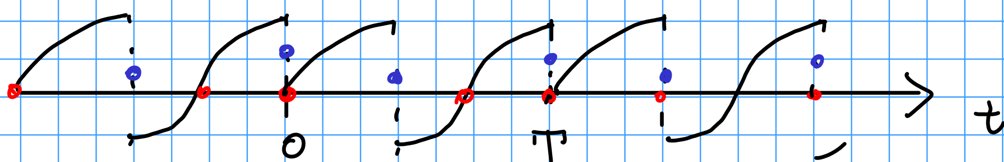
e f' è limitata su $]t_{i-1}, t_i[$

QUESTO IMPLICA CHE per ogni t_i esistono

$$\text{"} f(t_i^-) = \text{"} \lim_{t \to t_i^-} f(t) \qquad \lim_{t \to t_i^+} f(t) = \text{"} f(t_i^+) \text{"}$$

(se f su $]a,b[$ è C^1 con derivata limitata $\Rightarrow \exists f(a^+)$ e $\exists f(b^-)$)

NEI PUNTI t_i NON È DETTO CHE f sia continua perché può succedere che $f(t_i^+) \neq f(t_i^-)$



← uno possibile $f(t)$ C^1 a tratti

(in blu la media tra $f(t^+)$ e $f(t^-)$ nei punti $t=t_i$, VALORE A CUI TENDE LA SERIE DI FOURIER)

(NO DIM PER IL <u>TEOREMA</u>)

[Se f è C^1 a tratti la serie di Fourier di F CONVERGE PUNTUALMENTE a $\dfrac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$]

FATTO si può dimostrare che esistono f continue per le quali non vale la convergenza puntuale in "molti punti" (per esempio la serie non converge per tutti i t razionali)

NON TUTTE LE FUNZIONI CONTINUE SONO SOMMA (PUNTUALE) DELLA LORO SERIE DI FOURIER.

OSS. Se f è discontinua NON È POSSIBILE AVERE LA CONV. UNIF DELLA SERIE DI Fourier, dato che la serie

$$\sum c_n e^{in\omega t}$$

è una serie di funzioni continue

(se ci fosse conv. unif $\Rightarrow$ f dovrebbe essere continua)

È COMPLICATO!!

(FINORA HO: (1) Preso f.
(2) trovato i c_n
(3) mi sono chiesto se $f = \sum c_n e^{in\omega t}$)

PROVIAMO A PARTIRE DAI (c_n)

Supponiamo che (c_n) sia una succ. di numeri complessi.

Definisco

$$S_m(t) := \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{in\omega t}$$

(S_n è un "polinomio trigonometrico complesso")

DOMANDA esiste $\lim S_m$ PUNTUALE / UNIF ??

PROP Se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_m| < \infty$ allora S_m converge uniformemente a una funzione f, con f continua

(che dunque verifica $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \forall t$)

Inoltre $c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-im\omega t} \, dt$

(i c_m sono proprio i coeff. di Fourier della f costruita dai (c_n))

DIM DIMOSTRO CHE $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$ converge TOTALMENTE.

Infatti $\| c_n e^{in\omega t} \|_\infty = \max_{t \in \mathbb{R}} | c_n e^{in\omega t} | = c_n$

(perché $|e^{im\omega t}| = 1 \quad \forall t$)

DUNQUE: $\sum |c_n| < +\infty \Leftrightarrow \sum \| c_n e^{in\omega t} \|_\infty < +\infty$

Ho LA CONV. TOT. $\Rightarrow$ CONV. UNIF $\Rightarrow$ esiste $f(t) := \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$

Per la conv. unif., dato $m \in \mathbb{Z}$, ho:

$$\int_0^T f(t) e^{-im\omega t} = \int_0^T \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \right) e^{-im\omega t} \, dt =$$

(la so per la conv. unif.) $= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^T e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt =$

(come prima) $\quad c_m T \quad$ dunque $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$

PROP. Se so che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| \, n^k < +\infty$ per $k \in \mathbb{N}$

$\left(\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty \right)$ allora la f trovata prima

$$f(t) \underset{\text{UNIF}}{=} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$ è di classe C^k

e si può derivare per serie

$$f^{(k)}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (in\omega)^k e^{in\omega t}$$

[INOLTRE TUTTE LE DERIVATE $f, f', f'', \dots f^{(k)}$ sono limite unif delle rispettive serie]

Dim. Mi basta dim che la serie delle derivate k-esime è TOT. CONV. ($\Rightarrow$ CONV. UNIF.). QUESTO È VERO PERCHÉ

$$\| c_n (in\omega)^k e^{in\omega t} \|_\infty = |c_n| \, n^k \omega^k \qquad (\omega \in \mathbb{R})$$

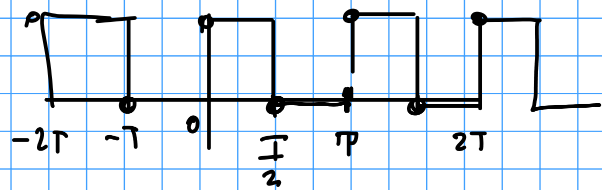
La cosa torna perché $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| \, n^k < +\infty$ $\oplus$

MORALE PIÙ i (c_n) sono sommabili

PIÙ $f = \sum c_n e^{in\omega}$ è REGOLARE e più la convergenza è BUONA

VEDIAMO DEGLI ESEMPI.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{se } \frac{T}{2} \le t < T \end{cases}$$



e esteso a tutto $\mathbb{R}$ in modo T-periodico.

f è C^1 a tratti!! . Calcoliamo i c_n

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} e^{-in\omega t}\, dt =$$

$$\frac{1}{T}\left[\frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}\right]_0^{T/2} = \frac{1}{T}\,\frac{1}{(-in\omega)}\left(e^{-in\pi} - 1\right) =$$

$$\frac{i}{2\pi n}\left((-1)^n - 1\right)$$

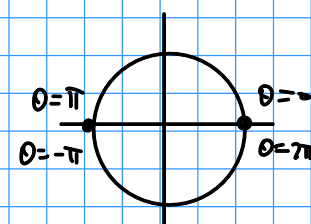
$\frac{1}{-i} = i$

$(T\omega = 2\pi)$

se $n \neq 0$ (c_0 va calcolato a parte)

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

$$e^{-in\pi} = \cos(-n\pi) + i\underbrace{\sin(-n\pi)}_{=0} = (-1)^n$$



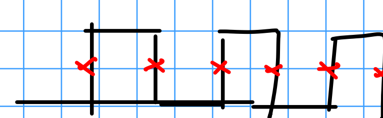
$$c_n = \frac{i}{2\pi n}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{-i}{\pi n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Se $n = 0$ $c_0 = \frac{1}{2}$

DUNQUE

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-i)}{\pi(2k+1)}\, e^{i(2k+1)\omega t} + \frac{1}{2} \quad \text{se } t \neq k\pi$$

$$= \frac{1}{2} \quad \text{se } t = k\pi$$



(dobbiamo tornarci perché abbiamo perso c_0)