Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 44 15/03/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

<u>Altri esempi</u> Consideriamo $\sum_{\substack{n=0\\(n=1)}}^{\infty} n x^n = f(x)$ $a_n = n$

Raggio di convergenza si ottiene da $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}\right)^{-1} =$
$\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^{-1} = \frac{1}{1} = 1$. $\boxed{f(x) \text{ esiste se } |x|<1}$

È chiaro che se $x = \pm 1$ la serie non converge.

Vediamo un trucco per calcolare $f(x)$ – L'idea è la stessa vista ieri, solo "alla rovescia". Se derivo $f(x)$ trovo $\sum n^2 x^{n-1}$ che non sembra meglio di f! INVECE partiamo dalla serie geometrica $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ per $|x|<1$

Se derivo $g(x)$ trovo $g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$. Moltiplico per x e trovo $x\, g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = f(x)$. Dunque

$$f(x) = x \frac{d}{dx}(1-x)^{-1} = x(1-x)^{-2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

PROBLEMINO. LANCIO UNA MONETA TANTE VOLTE FINO A QUANDO NON ESCE TESTA

Probabilità che faccio 1 lancio $= 1/2$

" " " " 2 lanci $= 1/4$

" " " " 3 lanci $= 1/8$

" " " " n lanci $= \frac{1}{2^n}$

NUMERO MEDIO DI LANCI $= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \dots \frac{n}{2^n}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \left.\frac{x}{(1-x)^2}\right|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = \frac{1/2}{1/4} = 2$$

Si può anche considerare una "moneta truccata" con probabilità p che esca TESTA e $(1-p)$ che esca croce.

. . . . . $\Rightarrow$ lunghezza media $= \frac{1}{p}$

OSS. ieri ho detto f è analitica ($\in C^\infty$) se $\forall x_0 \in$ Dominio

$\exists\, r>0$ tale che $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ se $|x-x_0|<r$

BASTEREBBE chiedere che $\forall x_0 \in$ Dominio esista una succ. (a_n) tale che $r =$ raggio di conv. della serie $\sum a_n x^n$ sia >0

e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad \text{se } |x-x_0|<r$$

(automaticamente $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$)

Prop. Se f è C^∞ su $]a,b[$ allora un "CRITERIO DI ANALITICITÀ" è il seguente: $\exists\, C, M$ tali che

(IPOTESI) $$|f^{(n)}(x)| \le C M^n \quad \forall x \in]a,b[\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dim. Se l'ipotesi è vera, dati $x, x_0 \in]a,b[$ si ha

$$f(x) = \sum_{m=0}^{k} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n,x})(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}_{R_n(x,x_0)}$$

Dall'ipotesi deduco che $$|R_n(x-x_0)| \le \frac{C M^{n+1} |x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{C(M|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ne viene che $R_n(x-x_0) \to 0$ se $n \to \infty$ (vince il fattoriale)

e dunque $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

Dunque f è analitica #

Con questa prop. si dimostra che tutte le "SOLITE" funzioni sono analitiche (dove sono C^∞)

ESEMPIO (COSTRUZIONE DI e^z)

Dato $z \in \mathbb{C}$, si sa. $$e^z = e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z))$$
$$e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$$

COME MAI ??

CHI È l'esponenziale ? (anche e^x ??)

$$e^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} e^{q_n} \quad \text{se } q_n \to \sqrt{2}$$

avendo definito $e^q = e^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{e^n}$

POSSIBILITÀ: $e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

Se faccio così devo dim. che la serie è sommabile per ogni x ($\sqrt[n]{n!} \to +\infty \Rightarrow R = +\infty$)

e fatto questo devo RICAVARE LE PROPRIETÀ DI e^x dalla def. espr. Per esempio

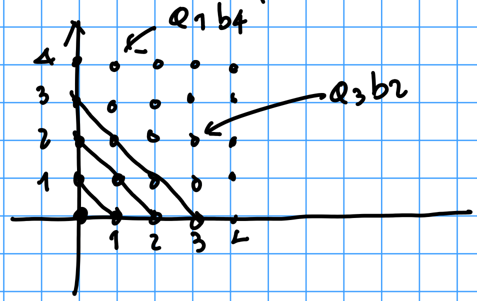
$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x$$

$n-1=m$

Per dim. che $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ si può usare il teorema di Cauchy sul prodotto di serie.

TEOREMA Date $(a_n)(b_n)$ $n \geq 0$ definisco $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ (prodotto alla Cauchy di (a_n) e (b_n))

$c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$



i c_i si trovano sommando sulle diagonali

Se $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$ si ha

$$\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)}_{\sum_{n,m} a_n b_m} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

anche con valori ∞

Stesso risultato se le due serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono assolutamente convergenti (IN QUESTO CASO HO VALORI FINITI)

VEDIAMO che allora $e^{x+y} = e^x e^y$ ← PARTO DA SX

$$e^x e^y = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \text{Cauchy!} \quad \left(c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = e^{x+y}$$

QUESTO APPROCCIO si può usare anche in $\mathbb{C}$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad z \in \mathbb{C}$$

la serie converge su $\mathbb{C}$ $(R = +\infty)$. Con lo stesso calcolo trovo

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

se faccio così trovo

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} \quad . \quad \text{DOMANDA} \quad \text{che è } e^{iy}$$

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n \frac{y^n}{n!}$$

$$i^n = 1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \dots = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = 2k \\ (-1)^k i & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow e^{iy} = \sum_{k=0}^{\infty} (i)^{2k} \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} (i)^{2k+1} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(y) + i \sin(y)$$