Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 43 14/03/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

IL COMPITINO È CONFERMATO
PER VENERDI 24 ORE 15
AULA B21

Serie di potenze: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

dove (a_n) è una succ. di numeri reali (o complessi)

VISTO: Posto $R = 1 / \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ $\Rightarrow$

La serie è sommabile $\forall x \in B(0,R)$ aperta

è uniformemente sommabile su $\overline{B(0,R')}$

$\Rightarrow$ $f:]-R,R[$ è $\boxed{C^\infty}$ e si può derivare per serie

$\forall x \in]-R,R[$ $\quad f^{(k)}(x) = \frac{d}{dx^k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ FATTORI}} x^{n-k}$

Ne segue che (*) $a_n = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$ (metto $x=0$ nella formula sopra)

In assoluto potrei assegnare $f(0), f'(0) \cdots f^{(n)}(0) \cdots$

e costruire una f (definita vicino a zero) che ha quelle derivate (ammesso che il raggio R, così costruito, sia >0)

Queste funzioni, ottenute come serie di potenze, sono dei "polinomi di grado ∞" (se $a_n = 0$ per $n \geq k$, $a_k \neq 0$ allora ho proprio un polinomio di grado k)

Viene SPONTANEA UNA DOMANDA:

se parto da una funzione $f:]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, di classe C^∞, e se definisco $a_n := \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

<u>POSSO DIRE CHE</u> $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $-\varepsilon < x < \varepsilon$??

(Notiamo che si tratta del "problema inverso" rispetto alla proprietà (*). Infatti in quanto detto sopra <u>si parte</u> dagli (a_n) e si costruisce una $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$, definita in $]-R, R[$ (R dipende da (a_n)) per cui vale (*))

La domanda si può riformulare:

Data f C^∞ è vero che f è SOMMA DELLA SUA SERIE DI TAYLOR

(la (*) ci dice che se f nasce come serie di potenze, allora è vero)

IN GENERALE LA RISPOSTA È NO. ESISTONO funzioni C^∞ che non sono somma della loro serie di Taylor.

<u>ESEMPIO</u>

Definisco $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

DICO CHE f è C^∞ e che $f^{(k)}(0)=0 \quad \forall k$

(f è $o(x^k)$ per ogni k - f va a zero più rapidamente di qualunque potenza)

<u>Facciamo dei calcoli</u> (1) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Chiaro perché

se $x\to 0$ $x^2 \to 0$ $\frac{1}{x^2}\to\infty$ $-\frac{1}{x^2}\to -\infty$ $e^{-\frac{1}{x^2}} \to 0$

(2) È OVVIO che $f^{(k)}(x)$ esiste se $x\neq 0$. Vediamo che esiste anche in zero e che fa zero.

<u>$k=1$</u> Calcoliamo $f'(x)$ per $x\neq 0$. Trovo

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x^{-3}e^{-x^{-2}} = \frac{2e^{-x^{-2}}}{x^3}$$

$\frac{1}{x^2} = y \quad x = \frac{1}{\sqrt{y}}$

Se faccio il limite per $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \lim_{y\to+\infty}\frac{e^{-y}}{y^{-3/2}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y^{3/2}}{e^y} \overset{\text{Hôp}}{=} \lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{3}{2}y^{1/2}}{e^y} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{y}}}{e^y} = 0$$

Ho dim. che $f'(x)\to 0$ se $x\to 0$; Questo implica ($\simeq$ Hôp) $f'(0)=0$

<u>$k=2$</u> $$\frac{d^2}{dx^2}e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{d}{dx}2x^{-3}e^{-x^{-2}} = -6x^{-4}e^{-x^{-2}} + 2x^{-3}e^{-x^{-2}}(+2x^{-3})$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{-6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6}\left(\underset{\downarrow\, 4}{4-6x^2}\right)$$

dico che $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} \xrightarrow{x\to 0} 0$ se ragiono come nel caso precedente lo dimostro..

$$\left(\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{-y}}{y^{-3}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y^2}{e^y} \; - - - - \; \lim_{y\to\infty}\frac{2\cdot 3}{e^y} = 0\right)$$

ITERANDO IL RAGIONAMENTO VEDO CHE

$$\frac{d^k}{dx^k} f(x) = P(x)\,\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m}$$

con P polinomio in x e m intero OPPORTUNI (dipendono da k)

(si può dimostrare per induzione)

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f^{(k)}(x) = P(0)\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} = P(0)\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{-y}}{y^{-\frac{m}{2}}}$$

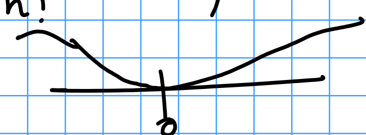
$\left(y=\frac{1}{x^2}\right)$ $$= P(0)\lim_{y\to+\infty}\frac{y^{\frac{m}{2}}}{e^{y}} = (\text{Hôpital}) = 0$$

DUNQUE $f^{(k)}(0)=0 \quad \forall k$. COSA MI DICE QUESTO ?!

Mi dice che la serie di Taylor di f in $x=0$ è LA SERIE NULLA

(tutti i coeff di Taylor $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$)

PERÒ $f(x)>0$ se $x\neq 0$



DUNQUE $f(x) \neq$ sua serie di Taylor $\forall x \neq 0$

DUNQUE LE f ottenute come serie di potenze sono SPECIALI FUNZIONI C^∞

IN PARTICOLARE PER TALI FUNZIONI, se conosco tutte le derivate in zero, conosco f in un intorno di zero.

QUESTE FUNZIONI SI CHIAMANO "ANALITICHE"

IN REALTÀ, dovrei chiamare serie di potenze una serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ dove $x_0 \in \mathbb{R}$

(finora $x_0=0$) TUTTO QUANTO DETTO È ANCORA VERO:

si definisce R e la convergenza si ha in $]x_0-R, x_0+R[$

e $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

DEF. Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) e $f:\Omega\to\mathbb{R}$ f C^∞, (o $f:\Omega\to\mathbb{C}$) dico che f è ANALITICA IN Ω se per ogni punto $x_0\in\Omega$ esiste $r>0$ tale che

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{per } |x-x_0|<r$$

(per ogni x_0 f è somma della sua serie di Taylor VICINO A x_0)

Per esempio $f(x)=\frac{1}{1-x}$; questa f è analitica in $\mathbb{R}\setminus\{1\}=\{x\neq 1\}$. In effetti io so che

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad \text{per } |x|<1$$

Questo non basta. Mi serve poter sviluppare f vicino a un qualunque $x_0\neq 1$. Posso fare così: Fisso $x_0\neq 1$

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{(1-x_0)-(x-x_0)}=\frac{1}{1-x_0}\,\frac{1}{1-\left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)}\overset{\text{serie geom.}}{=}$$

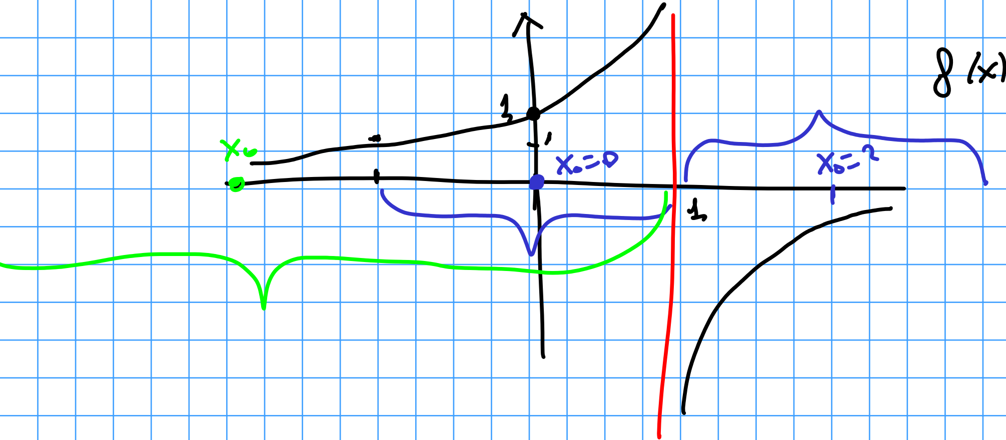
$$\frac{1}{1-x_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{(1-x_0)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

dove $a_n=\frac{1}{(1-x_0)^{n+1}}$ (se $x_0=0$ ritrovo $a_n=1$)

Devo verificare che il raggio di convergenza è >0

MA $R=1\Big/\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{(1-x_0)^{n+1}}\right|}=1\Big/\frac{1}{|1-x_0|}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{|1-x_0|}}}_{1}=\underset{>0}{|1-x_0|}$

Questo mi dice che, dato $x_0\neq 1$, la $f(x)$ è somma di una serie di potenze che converge su $]x_0-R,x_0+R[$ dove R = distanza da x_0 e 1



DUNQUE f è ANALITICA

PROPRIETÀ Supponiamo $f: \Omega \to \mathbb{R}$ analitica. Ω CONNESSO

(a) $x_0 \in \Omega$. Se $f^{(k)}(x_0)=0 \quad \forall k \Rightarrow f(x)=0 \ \forall x \in \Omega$.

(b) Se $x_0 \in \Omega$, e (x_n) è una succ. di punti di Ω con $x_n \to 0$ tale che $f(x_n)=0$ (f ha una successione di zeri che tende a un punto del dominio)

$\Rightarrow f(x)=0 \quad \forall x \in \Omega$

ESEMPIO $f(x)=e^x$. Vediamo che

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

In effetti posso usare la formula di Taylor con resto di Lagrange ($x_0=0$). Sia $x \in \mathbb{R}$. Dato k INTERO

$$e^x = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{e^{\xi_k}}{(k+1)!} x^{k+1}}_{R_k(x)}$$

per $0 < \xi_k < x$ o $x < \xi_k < 0$ ($|\xi_k| \le |x|$)

Abbiamo che $\left| R_k(x) \right| \le \frac{e^{|x|} |x|^{k+1}}{(k+1)!} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

(VINCE IL FATTORIALE). Quindi

$$e^x = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\lim_{k\to\infty} R_k(x)}_{=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

e^x è somma della sua serie di Taylor in zero

$\boxed{\text{FATTO}}$ (si può dimostrare come nell'esercizio di $f(x)=\frac{1}{1-x}$) se
$f(x)=\sum a_n(x-x_0)^n$ in $]x_0-R, x_0+R[$

$\Rightarrow$ f è analitica in $]x_0-R, x_0+R[$

(cioè $\forall x_1 \in]x_0-R, x_0+R[$ $f(x)=\sum b_n(x-x_1)^n$)

$\Rightarrow$ e^x è analitica su $\mathbb{R}$!!

NELLA STESSA MANIERA VEDO CHE

$f(x)=\sin(x)$, $f(x)=\cos(x)$ sono analitiche e che

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

<u>ESEMPIO</u> Partiamo dalla serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ $(=f(x))$

DOMANDE: (1) Per quali x converge? $\left(a_n=\frac{1}{n} \quad n\geq 1\right)$

(2) Possiamo calcolare $f(x)$?

(1) $\leftarrow$ RAGGIO DI CONV. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1$ $\left(\text{so che } \sqrt[n]{n}\to 1 \ !!\right)$

$\Rightarrow R=\frac{1}{1}=1$

DUNQUE LA SERIE CONVERGE IN $]-1,1[$

e <u>non converge</u> se $x>1$, $x<-1$

RIMANGONO 1 e -1. Se $x=1$ trovo $\sum\frac{1}{n}=+\infty$

Se $x=-1$ trovo $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ CONV. PER LEIBNIZ

DUNQUE LA SERIE CONVERGE SU $[-1, 1[$

(e so che è C^∞ in $]-1, 1[$ — I TEOREMI NON "COPRONO" $x = -1$ — so che converge in -1 ma non so se f è continua in -1)

(2) Come riesco a calcolare $f(x)$?? Posso usare le proprietà di derivazione: so che

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \underset{(n-1=m)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= (\text{serie geometrica}) = \frac{1}{1-x}$$

Dunque $f'(x) = \frac{1}{1-x}$ per $-1 < x < 1$

Faccio la primitiva:

$$f(x) = \int \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x) + C \qquad -1 < x < 1$$

Chi è C ?? Metto $x = 0$ trovo $f(0) = 0 + c$

$\boxed{C = f(0)}$ Guardo la def. di f: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \Rightarrow f(0) = (a_0 = 0) = 0$

DUNQUE $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

MI PIACEREBBE che la formula valesse anche in $x = -1$

PER AVERE QUESTO CI VORREBBE LA CONV. UNIF in $[-1, \alpha]$

Per esempio in $[-1, 0]$. Vediamo se c'è conv. totale in $[-1, 0]$

$$M_n = \sup_{-1 \le x \le 0} \left| \frac{x^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \leftarrow \text{NON È SOMMABILE}$$

NON HO LA CONV. TOTALE — PURTROPPO...

IN QUESTO CASO RIESCO A TROVARE LA CONV. UNIF.

dato la natura a segni alterni della serie

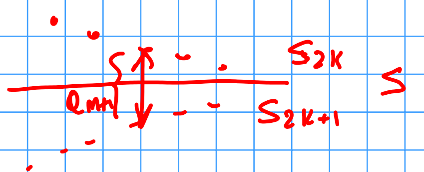
$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} \qquad 0 \le x \le 1$$

Vorrei la conv. unif su $[0,1]$

<u>RICORDARE</u>: se ho $\sum (-1)^n a_n$ $\quad a_n \ge 0$, a_n decrescente, $a_n \to 0$

$\Rightarrow$ la serie converge alla sua somma S e INOLTRE

$$\boxed{|S_n - S| \le a_n} \qquad \left(S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \right)$$



Nel nostro caso $\quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k} \qquad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$

e $\quad \left| S_n(x) - S(x) \right| \le \frac{x^n}{n} \le \frac{1}{n} \quad$ se $0 \le x \le 1$

Dunque $\quad \|S_n - S\|_\infty \le \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad$ <u>$S_n \to S$ UNIF.</u>

DUNQUE HO LA CONV. UNIF $\Rightarrow$ LA SOMMA DELLA SERIE È CONTINUA SU $[0,1]$ $\simeq$

la somma originale $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ è continua su $[-1,0]$

$$\Rightarrow \quad f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\ln(2)$$

<u>MORALE</u> $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$