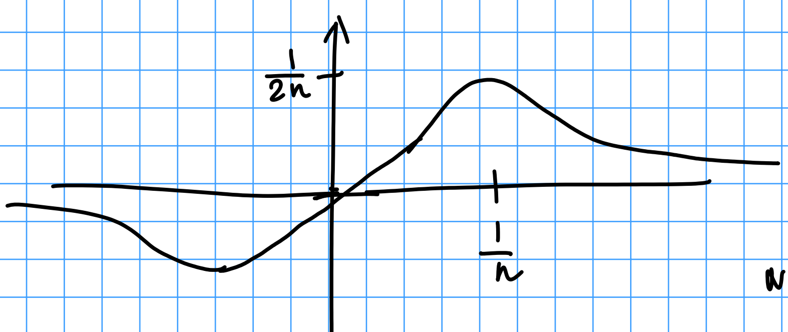
Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 42   13/03/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = \sum_{1}^{\infty} f_n(x) \qquad \text{dove} \quad f_n = \frac{x}{1+n^2x^2}$$

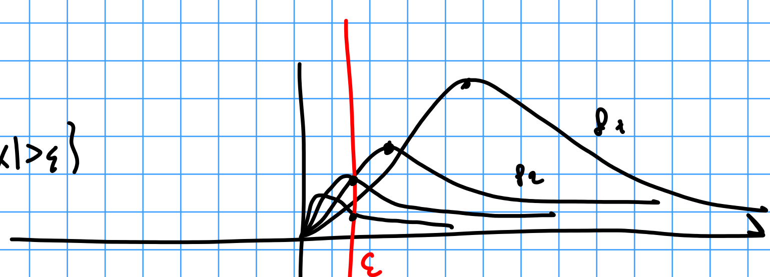


$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1}{2n} \leftarrow \text{NON È SOMMABILE}$$

NON HO LA CONV. TOTALE SU $\mathbb{R}$

<u>Però</u> fisso $\varepsilon > 0$

mi metto su $A_\varepsilon = \{|x| > \varepsilon\}$



Studio f_n su A_ε e vedo

che se $n \leq 1/\varepsilon \Rightarrow \|f_n\|_\infty = \frac{1}{2n}$ ($\| \;\|_\infty$ su A_ε !)

invece se $n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \|f_n\|_\infty = f_n(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1+n^2\varepsilon^2}$

Dunque $$\sum_{1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \underbrace{\sum_{1 \leq n \leq 1/\varepsilon} \frac{1}{2n}}_{\text{NUMERO FINITO DI ADDENDI}} + \underbrace{\sum_{n > 1/\varepsilon} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2 n^2}}_{\text{SERIE CONVERGENTE}} < +\infty$$

$\Rightarrow$ Ho conv. TOT. su A_ε $\Rightarrow$ Ho conv. unif su A_ε $\Rightarrow$

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{è continua su } A_\varepsilon.$$

Dato che $\varepsilon > 0$ è arbitrario $\Rightarrow$ f è continua su ogni $x \neq 0$ (dato $x \neq 0$ prendo $\varepsilon = |x|/2$ $\Rightarrow$ f è cont. su A_ε $\Rightarrow$ f è cont. in x)

- Analogamente si può dim. che f è C^1 in $\{x \neq 0\}$ e che

$$\textcircled{*} \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \qquad \forall x \neq \phi$$

INFATTI se fisso $\varepsilon > 0$ e valuto $\|f_n'\|_{\infty, A_\varepsilon}$ trovo

$$\|f_n'\|_{\infty, A_\varepsilon} = \sup_{x \geq \varepsilon} \frac{|1-n^2x^2|}{(1+n^2x^2)^2} \leq \sup_{x \geq \varepsilon} \frac{|1| + |-n^2x^2|}{(1+n^2x^2)^2} = \sup_{x \geq \varepsilon} \frac{1}{(1+n^2x^2)}$$

$$\underset{(x \geq \varepsilon)}{=} \frac{1}{1+\varepsilon^2 n^2} \leftarrow \text{SOMMABILE}$$

Applicando i teoremi $\Rightarrow$ $\textcircled{*}$ (prima su A_ε $\Rightarrow$ su $\{x \neq 0\}$).

<u>DOMANDA</u> Sono sicuro che non c'è conv. unif su $\mathbb{R}$? (di sicuro non c'è la conv. tot. - come visto sopra - ma potrebbe esserci la uniforme). Vediamo che NON c'è CONV. UNIF.

Se la serie conv. unif $\Rightarrow$ f sarebbe continua in $x=0$ e cioè $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$. Dimostro che non è vero

Prendo $x > 0$ e valutiamo $f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} \geq \sum_{1 \leq n \leq \frac{1}{x}} \frac{x}{1+n^2x^2} \geq \sum_{1 \leq n \leq \frac{1}{x}} \frac{x}{1+1} = \quad \left(\begin{array}{l} n \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow nx \leq 1 \\ n^2x^2 \leq 1 \end{array} \right)$$

$$\frac{x}{2} \sum_{n=1}^{n_0} 1 = n_0 \frac{x}{2} \quad \text{dove} \quad \underbrace{n_0 \leq \frac{1}{x} \qquad n_0 + 1 > \frac{1}{x}} \qquad \left[\frac{1}{x}\right] = n_0$$

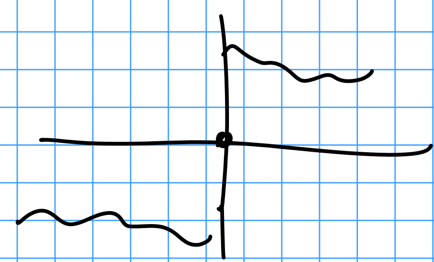
$$\frac{x}{2}\left[\frac{1}{x}\right] =: h(x) \to \frac{1}{2} \quad \text{se } x \to 0^+ \qquad \left(\frac{1}{x}-1 < \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{x}{2}\left(\frac{1}{x}-1\right) \le \cdot \le \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2}\left(\frac{1}{x}-1\right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \to \frac{1}{2}.$$

DUNQUE $f(x) \ge h(x)$ con $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \frac{1}{2}$

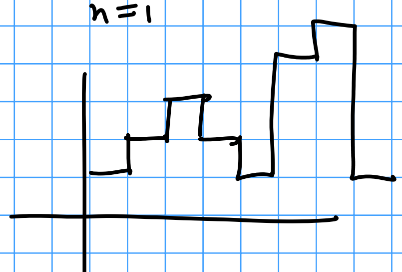
da cui f non può tendere a zero



NON CI PUÒ ESSERE CONV. UNIF.

Per curiosità – con un argomento ad hoc — posso calcolare $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. Notiamo che se ho una funzione $h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e studio $\sum_{n=1}^{\infty} h(n)$ posso scrivere

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(n) = \int_1^{\infty} h([y])\,dy \qquad \left(\text{se gli oggetti esistono}\right)$$



$$\left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_1^{\infty} \frac{1}{[y]^2}\,dy\right)$$

Nel nostro caso (se $x>0$)

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+[y]^2x^2}\,dy$$

dato che $y-1 \le [y] \le y$ otteniamo (se $x>0$)

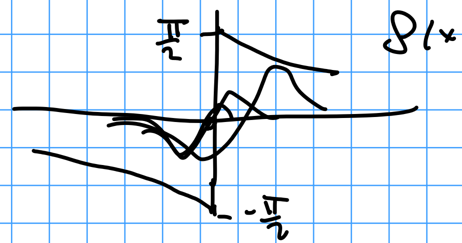
$y-1=s \quad dy=ds$
s varia da 0 a $+\infty$
cambio nome $y=s$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+y^2x^2}\,dx \le f(x) \le \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+(y-1)^2x^2}\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+y^2x^2}\,dy$$

Faccio la sost. $t = xy \Rightarrow dt = x\,dy$. Trovo

$$\underbrace{\int_x^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}}_{=\frac{\pi}{2} - \operatorname{atan}(x)} \le f(x) \le \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{atan} t \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Se faccio tendere $x \to 0^+$ trovo $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$

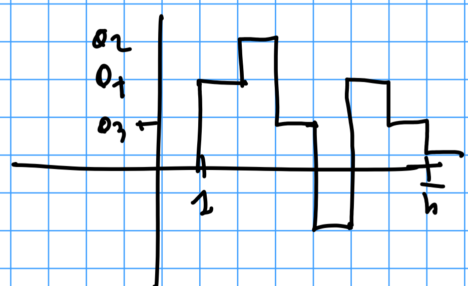


---

data a_n posso introdurre $f_n(y) = a_n$ se $n \le y < n+1$

$$\Downarrow$$

$$\sum_1^{\infty} a_n = \int_1^{\infty} f_n(y)\,dy$$



SERIE DI POTENZE

Sia data una successione (a_n) in $\mathbb{R}$ (oppure $\mathbb{C}$)
e consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (dunque l'addendo è $f_n(x) = a_n x^n$)

DOMANDA: per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge ?? — QUALI PROPRIETÀ DI (a_n) garantiscono la conv. (possibilmente UNIFORME)

DEF. (RAGGIO DI CONVERGENZA).

Definisco il raggio di conv. R della serie $\sum_0^{\infty} a_n x^n$. Poniamo

$$L = \max\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (\text{di solito è un limite})$$

e pon $R := \frac{1}{L} \left(= \begin{cases} 0 & \text{se } L = +\infty \\ +\infty & \text{se } L = 0 \\ \frac{1}{L} & \text{se } 0 < L < +\infty \end{cases} \right)$

(nel seguito faccio finta che $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$)

Questa definizione si può fare <u>anche nel caso complesso</u>

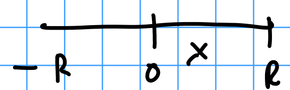
($L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ha senso: se $a_n = x_n + i y_n \Rightarrow |a_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$)

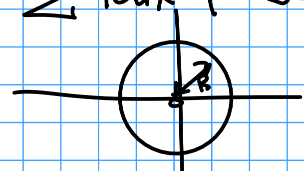
<u>TEOREMA</u> Supponiamo che $R > 0$. Allora

(a) la serie converge puntualmente su $-R < x < R$ (su $]-R, R[$)

(nel caso complesso la serie converge su $B(0,R)$)

(Anzi se $x \in \,]-R, R[$ ho che la serie $\sum |a_n x^n| < +\infty$)





la serie NON CONVERGE per ogni x con $|x| > R$

(fuori dal chiuso)

NON SI DICE NULLA SULLE X con $|x| = R$ (e vedremo che NON SI PUÒ DIRE NULLA IN GENERALE

(b) se prendo R' con $0 < R' < R$ allora la serie conv. unif. su $[-R', R']$ (o su $\overline{B(0,R')}$ nel caso complesso)

<u>DIM.</u> Uso il "criterio della radice" per le serie a termini ≥ 0:

[Se $\alpha_n \geq 0$ e se $\sqrt[n]{\alpha_n} \to \ell <$. Allora

se $\ell < 1$ $\sum_0^\infty \alpha_n < +\infty$

se $\ell > 1$ $\sum \alpha_n = +\infty$ (NON SO NULLA SE $\ell = 1$)]

Fisso x e cerco di applicare il criterio della radice a $\sum |a_n x^n|$ (se converge $\Rightarrow$ converge anche $\sum a_n x^n$). Mi serve il limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|\, L$$

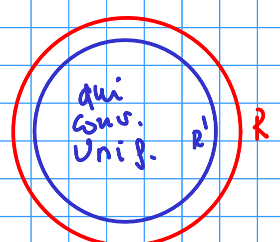
Per avere $\ell < 1$ mi serve $|x| < \frac{1}{L} = R$. Dunque se $|x| < R$ la serie converge. Se invece $|x| > R$ ho $\ell > 1 \Rightarrow$ la serie non converge.

Per la (b) dimostro la convergenza totale. $\left(f_n(x) = a_n x^n\right)$

$$\|f_n\|_{\infty, \underset{[-R',R']}{B(0,R')}} = \sup_{|x|\le R'} |a_n x^n| = |a_n| \sup_{|x|\le R'} |x|^n = |a_n| (R')^n$$

Applico il criterio della radice a $\sum \|f_n\|_\infty = \sum |a_n| (R')^n$

e vedo che questo converge perché $\sqrt[n]{|a_n|(R')^n} = R' \sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{R'}{R} < 1$



$(B(0,R)$ è aperto$)$

(noto che $B(0,R) =$ UNIONE DI $\overline{B(0,R')}$ per $R' < R$

ESEMPIO: serie geometrica: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (a_n = 1 \ \forall n)$

NOI SAPPIAMO CHE f converge se $|x| < 1$, perché conosciamo le somme parziali:

$$\sum_{k=0}^{m} x^k \underset{(x\neq 1)}{=} \frac{1-x^{m+1}}{1-x} \longrightarrow \frac{1}{1-x} \quad \text{se } |x|<1$$

(se $x \geq 1$ diverge, se $x \leq -1$ è indeterminato). IN EFFETTI se calcolo il raggio di convergenza trovo 1:

$$L = \sqrt[n]{1} \to 1 \qquad R = \frac{1}{L} = \frac{1}{1} = 1$$

<u>VARIANTE</u> $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ ← È UNA SERIE DI POTENZE?

sì. gli a_n sono $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ dispari} \\ a_n = (-1)^k & \text{se } n = 2k \end{cases}$

$$1 + 0x - 1\cdot x^2 + 0x^3 + 1\cdot x^4 + 0\cdot x^5 - 1\cdot x^6 + 0x^7 \dots$$

$$\sum (-1)^n x^{2n} = \sum a_n x^n \qquad 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \dots$$

per il raggio mi serve $\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ dispari} \\ 1 & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$ NON HA LIMITE !!

Però il max lim $\sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$

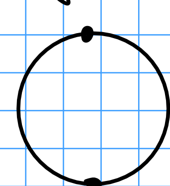
DUNQUE $\displaystyle\sum_{0} (-1)^n x^{2n}$ converge su $]-1,1[$ / $B(0,1)$

Noto che $\displaystyle\sum_{0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$ <u>se $|x|<1$</u>

Se la guardo in $\mathbb{R}$ ho una funzione C^∞ — COME MAI LA CONVERGENZA C'È SOLO IN $]-1,1[$

IN $\mathbb{C}$ si capisce meglio perché la serie converge a

$$\sum_{0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \frac{1}{1+z^2}$$ che è singolare in $\pm i$



<u>DUNQUE</u> $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è definita per $|x| < R$

(e non è definita su $\{|x| > R\}$. Abbiamo $f:]-R,R[\to \mathbb{R}$

REGOLARITÀ (a) $f(x)$ è continua su $]-R,R[$

(a causa della conv. unif. su ogni $[-R',R']$ con $R'<R$)

(b) Se calcolo il raggio di convergenza della serie delle derivate $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n \, x^{n-1}$ $\left(= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n \right)$

TROVO LO STESSO R !! $\left(\text{IDEA: } \sqrt[n]{|a_n| \cdot n} = \sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{n} \text{ e } \sqrt[n]{n} \to 1 \right)$

DUNQUE La serie delle derivate conv. unif. su ogni

$[-R',R'] \subset]-R,R[\implies$ posso derivare sotto il segno di serie quando $x \in [-R',R']$.

CONSEGUENZA

f è C^1 su $]-R,R[$ e vale la formula

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(c) Ragionando come in (b) ottengo che $\forall k$ intero

f è di classe $C^k(]-R,R[)$ e

$$(\star) \qquad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} \qquad -R<x<R$$

DUNQUE UNA SERIE DI POTENZE DEFINISCE UNA FUNZIONE $C^\infty(]-R,R[)$

Notiamo allora che se metto $x=0$ in $(\star)$ trovo

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n 0^{n-k} \quad \cancel{\Rightarrow 0} \text{ NO}$$

ATTENZIONE: se scrivo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ SOTTINTENDO CHE

$x^0 = 1 \quad \forall x$, altrimenti non potrei rappresentare il "termine noto".

$f(0) = a_0$

Nella formula sopra $0^{n-k} = \begin{cases} 0 & \text{se } n>k \\ 1 & \text{se } n=k \end{cases}$ DUNQUE

$$f^{(k)}(0) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-k+1)\,a_k = k!\,a_k$$

detto altrimenti $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Dunque la funzione f (che è costruita a partire dagli a_k) ha la proprietà che a_k è il coeff k-esimo di Taylor per f (in $x_0 = 0$)

CI FERMIAMO QUI