Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 41 08/03/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Riepilogo sui teoremi per le serie di funzioni (si ottengono immediatamente dai teoremi sulle successioni di funzioni)

Date $f_n : A \to \mathbb{R}^M$, $A \subset \mathbb{R}^N$. Supponiamo che la serie delle f_n sia unif. convergente su A (per esempio perché la serie è TOTALMENTE). ALLORA:

- Se f_n sono continue in A $\Rightarrow \sum_1^\infty f_n$ è continua in A

  PIU' IN GENERALE se x_0 di accumulazione per A, se $\forall n$ esiste $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = l_n$, allora la serie $\sum_1 l_n$ è convergente e $\lim_{x \to x_0} \sum_1^\infty f_n(x) = \sum_1^\infty l_n$

  (nel caso della continuità $l_n = f_n(x_0)$)

- Se A ha misura finita, f_n continue

$$\int_A \left(\sum_1^\infty f_n(x) \right) dx = \sum_1^\infty \int_A f_n(x)$$

- Se f_n sono C^1, se la serie delle derivate f_n' è (anche lei) uniformemente convergenti, allora $\sum_1^\infty f_n$

è di classe C^1 e si ha

$$\frac{d}{dx} \sum_1^\infty f_n(x) = \sum_1^\infty f_n'(x)$$

(NATURALMENTE QUESTO RISULTATO SI PUÒ ITERARE e TROVARE QUANDO $\sum_1^m f_n$ è di classe C^k $k = 1, 2, \dots$)

<u>ESERCIZIO</u> Considera la serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{1+n^2x^2} = f(x)$

Qui $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$. Per quali x posso considerare $f(x)$ –

per quali x la serie $\sum f_n$ è convergente – su quale insieme la serie converge puntualmente ??

RISPOSTA : $x \neq 0$ Se $x = 0$ ho $\sum_1^\infty 1 = +\infty$

$x \neq 0$ $\frac{1}{1+n^2x^2} \le \frac{1}{x^2} \frac{1}{n^2}$ e so che $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} < +\infty$

(la f_n è "asintotica" a $\frac{1}{x^2}\frac{1}{n^2}$)

$f(x)$ esiste se $x \neq 0$ – la serie conv. pt. su $\{x \neq 0\}$

<u>DOMANDA</u> f è continua su $\{X \neq 0\}$?

CI SERVIREBBE LA CONV. UNIV., SAREBBE OTTIMA LA CONV. TOT.

PROVIAMO A VEDERE SE C'È CONV. TOTALE SU $\{x \neq 0\}$

Per questo devo calcolare $\|f_n\|_{\infty, \{x \neq 0\}} = \sup_{x \neq 0} \left| \frac{1}{1+n^2x^2} \right| = 1$

<u>VA MALE</u> $\sum_1^\infty 1 = +\infty$ NON C'È CONV. TOTALE

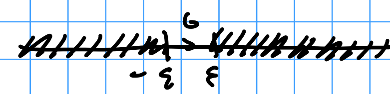
NOTIAMO Non c'è di sicuro neanche la conv. unif. INFATTI

Se $\sum f_n$ CONV UNIF $\Rightarrow \|f_n\|_\infty \to 0$ (proprietà generale negli spazi vettoriali normati: se $\sum x_n$ CONV. $\Rightarrow x_n \to 0$)

Nel nostro caso $\|f_n\|_\infty = 1$ NON TENDE A ZERO

MI DEVO "ALLONTANARE DA ZERO"   Fissiamo $\varepsilon > 0$

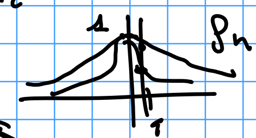
e consideriamo $A_\varepsilon = \{ |x| \geq \varepsilon \}$



Proviamo a vedere se la serie conv. tot. su A_ε

Adesso $\|f_n\|_{\infty, A_\varepsilon} = \sup_{|x| \geq \varepsilon} \dfrac{1}{1+n^2x^2} = \dfrac{1}{1+n^2\varepsilon^2}$

$f_n / \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \to 1$



$\|f_n\|_{\infty, A_\varepsilon} \simeq \dfrac{1}{n^2\varepsilon^2}$ che è sommabile $\Rightarrow$

la serie conv. tot ($\Rightarrow$ unif) su A_ε $\left(\dfrac{1}{1+n^2\varepsilon^2} \leq \dfrac{1}{n^2\varepsilon^2} \right)$

$\sum_1^\infty \frac{1}{1+n^2x^2} = f(x)$ è continua su A_ε $(\forall \varepsilon > 0)$

Dato che $\varepsilon > 0$ è arbitrario $\Rightarrow$ f è continua su ogni $x \neq 0$

INOLTRE, da quanto detto, ho anche $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} = 0$

(uso per es. la conv. unif su $A_1 = \{|x| \geq 1\}$ che ha $+\infty$ come pto di acc.)

DUNQUE $f(x) = \sum \dfrac{1}{1+n^2x^2} \simeq$

PROBLEMA   Posso dire che $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$??

Vediamo se riusciamo a dimostrarlo ("con le mani")

Mi serve una "minorazione" $f(x) \geq g(x)$ con una $g(x)$ che riesco a calcolare e tale che $g(x) \to +\infty$ se $x \to 0$

FISSO $x \neq 0$ e guardo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} \geq \sum_{n=1}^{\sqrt{[\frac{1}{x^2}]}} \frac{1}{1+n^2x^2} \geq$

($[y] = m \iff m \leq y < m+1$). Nell'ultima somma $\underbrace{n^2x^2 \leq 1}$

$\Uparrow$

$n^2 \leq \dfrac{1}{x^2}$

$\Uparrow$

$n^2 \leq \left[\dfrac{1}{x^2}\right]$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\sqrt{[\frac{1}{x^2}]}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{1}{x^2}\right]}$

DUNQUE $f(x) \geq \dfrac{1}{2}\sqrt{\left[\dfrac{1}{x^2}\right]} \xrightarrow{\text{se } x \to 0} +\infty$

(ho usato $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{1}{x^2}\right]}$) Effettivamente $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$.

ALTRO ESEMPIO SIMILE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$

$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ La serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$

se $x \neq 0$ $|f_n(x)| \simeq \frac{1}{n^2|x|} \leftarrow \odot$

se $x = 0$ $f_n(x) = 0$ (in particolare $f(0) = 0$)

Proviamo la conv. totale su $\mathbb{R}$

$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x|}{1+n^2x^2} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$$

Studiamo il grafico di f_n è DISPARI (guardo le $x>0$)

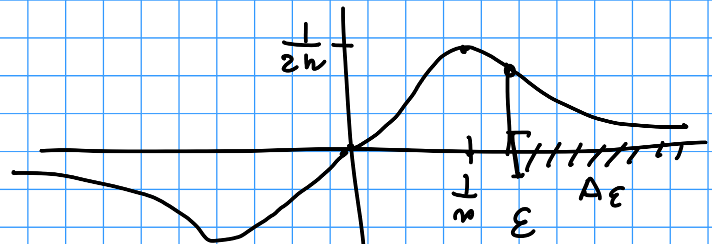
$f_n(0)=0$ $f_n(\infty)=0$

$$f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2 - x\,2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \qquad f_n'(x)=0 \text{ se } x = \pm\frac{1}{n}$$

$$f_n\left(\pm\frac{1}{n}\right) = \pm\frac{1/n}{1+1} = \pm\frac{1}{2n} \qquad \boxed{\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1}{2n}} \leftarrow \text{NON E' SOMMABILE}$$

NO CONV. TOT SU $\mathbb{R}$.

stesso idea di prima: Fisso $\varepsilon>0$ e guardo cosa succede su $A_\varepsilon = \{|x| \geq \varepsilon\}$



Se fisso $\varepsilon>0$ vedo che

per $n > \frac{1}{\varepsilon}$ il pto di max $x_n = \frac{1}{n}$ è $<$ di ε (fuori da A_ε)

$$\Rightarrow \sup_{A_\varepsilon} f_n = f_n(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2 n^2}$$

$$\|f_n\|_{\infty,A_\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} & \text{se } \quad n \le \dfrac{1}{\varepsilon} \\[2ex] \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2 n^2} & \text{se } n \geq \dfrac{1}{\varepsilon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum \|f_n\|_{\infty,A_\varepsilon} = \underbrace{\sum_{n=1}^{[1/\varepsilon]} \frac{1}{2n}}_{\text{finito}} + \underbrace{\sum_{n>[1/\varepsilon]} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2 n^2}}_{\text{converge perché } \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2 n^2} \sim \frac{1}{\varepsilon n^2}}$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow$ f è CONTINUA su A_ε $\forall \varepsilon > 0$ DUNQUE

f è CONTINUA SU $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (su $\{x \neq 0\}$)