Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 40 07/03/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

VISTO LE DEF. DI CONV. PUNTUALE E CONV. UNIFORME per una successione di funzioni $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ $A \subset \mathbb{R}^N$

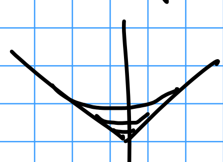
(di solito $N = M = 1$)

- Se $f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{P.T.}} f$
- Se $f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} f$ e f_n sono continue $\Rightarrow$ f continua

NON VALE IL RISULTATO

Se $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$, f_n C^1 $\Rightarrow$ f è C^1 e $f_n' \xrightarrow[\text{P.T.}]{\text{UNIF.}} f'$

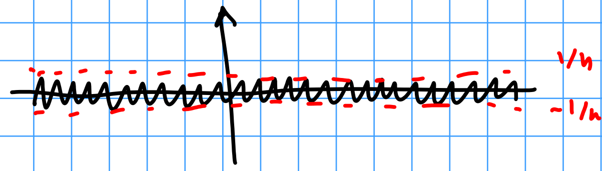
Il controesempio mostra che delle f_n C^1 possono convergere a una f (CONTINUA) non derivabile



UN ALTRO CONTROESEMPIO $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$

Dato che $\sin(t) \in [-1, 1] \Rightarrow f_n(x) \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$

(e valendo ci sono delle x in cui vale l'uguaglianza, $x = \frac{\pi}{2n}$, $x = \frac{-\pi}{2n}$)



Allora $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$

(su $A = \mathbb{R}$)

DUNQUE $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} 0$ $\quad \left(\|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\| = \frac{1}{n} \to 0 \right)$

Dunque $f_n \in C^1$ $\quad f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} 0$ $\quad$ ($0 \in C^1$!!)

Vediamo se $f_n' \to 0' = 0$. Quanto fa f_n' !?

$$f_n'(x) = \frac{d}{dx}\frac{\sin(nx)}{n} = \frac{n}{n}\cos(nx) = \cos(nx)$$

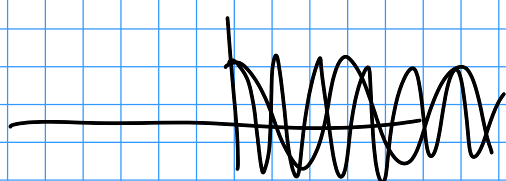
E' chiaro che f_n' NON TENDE UNIFORMEMENTE A ZERO PERCHÉ

$$\|f_n'\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n'(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\cos(nx)| = 1$$

($|\cos(nx)| \le 1$ e ci sono punti in cui viene 1, per es $x=0$)

IN REALTA' NON PUÒ VALERE NEANCHE $f_n' \xrightarrow{\text{PT}} 0$

dato che, almeno se $x=0$, $f_n'(x) = f_n'(0) = 1$ (non tende a zero)



Sembra plausibile che in nessun x reale $\cos(nx) \to 0$ PERÒ È UNA COSA COMPLICATA

#

• Confrontiamo la conv. unif con l'integrazione. QUI SAPPIAMO COSA SUCCEDE. Abbiamo il th. di Lebesgue: Se $f_n \xrightarrow{\text{PT}} f$ su E e $\forall x \in E$ $|f_n(x)| \le g(x)$ con g integrabile su E ALLORA f è integrab. su E

$$\int_E f_n(x)\,dx \to \int_E f(x)\,dx$$

Se $f_n \to f$ UNIF. A MAGGIOR RAGIONE posso usare Lebesgue dato che $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{PT}} f$. Se sono su un insieme

E di misura finita allora la g non mi serve (perché esiste automaticamente). POSSO DIM. QUESTO TEOREMA (che in realtà segue da Lebesgue, ma è più facile da dim.)

TEOREMA $E \subset \mathbb{R}^N$ E misurabile e $|E| < +\infty$.
Supponiamo che $f_n : E \to \mathbb{R}$ siano continue e che $f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} f$. Allora f (è continua e) vale

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$$

(gli integrali esistono dato che le funzioni sono continue)

Dim Valutiamo la differenza:

$$\left| \int_E f_n(x)\,dx - \int_E f(x)\,dx \right| = \left| \int_E \left(f_n(x) - f(x)\right) dx \right| \le$$

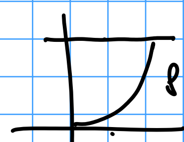
$$\int_E |f_n(x) - f(x)|\,dx \le \int_E \underbrace{\max_{y\in E} |f_n(y) - f(y)|}_{\max_E |f_n - f|}\, dx = \int_E \|f_n - f\|_\infty\, dx$$

costante in x

$$= \|f_n - f\|_\infty \, |E|$$

TENDE A ZERO perché $f_n \to f$ UNIF.

$$\left(\int_0^1 x^2\,dx \le \int_0^1 1\,dx \right) \qquad 1 = \max_{0\le y\le 1} y^2$$



DUNQUE $\left| \int_E f_n - \int_E f \right| \to 0 \iff \int_E f_n \to \int_E f$ ∎

TORNIAMO AL PROBLEMA DI SCAMBIO TRA LIMITE E DERIVATA. C'È UN TEOREMA UTILE

TEOREMA Supponiamo $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ siano C^1 e che $f_n \to f$ PUNTUALMENTE. SUPPONIAMO ANCHE che $\underbrace{f_n' \to g \text{ UNIFORMEMENTE}}_{\text{NOVITA' RISPETTO A PRIMA}}$ ($f, g : [a,b]$). Allora:

(1) f è C^1 (2) $f' = g$ (3) $f_n \to f$ UNIF.

DIM.

Premessa: Siano h e k due funzioni da $[a,b] \to \mathbb{R}$, con k continua

$$h \text{ è } C^1 \text{ e } h' = k \iff \int_a^x k(t)\,dt = h(x) - h(a) \quad \forall x \in [a,b]$$

$\Longrightarrow$

QUESTO È IL TEOREMA DEL CALCOLO INTEGRALE

Dimostriamo dunque il teorema. So che f_n sono C^1 dunque

$$\int_a^x f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(a) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Per ogni x in $[a,b]$ faccio il limite in n della eguaglianza sopra

per la conv. unif di f_n' a g

CONV. PUNTUALE DI f_n a f

$$\int_a^x g(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

DUNQUE per ogni x $\int_a^x g(t)\,dt = f(x) - f(a)$. Per la premessa (parte $\Leftarrow$) ottengo f è C^1 e $f' = g$. (Ho dim. (1) e (2))

Proviamo a dim (3). Se $x \in [a,b]$

$$f_n(x) - f(x) - f_n(a) + f(a) = \int_a^x \left(f_n'(t) - g(t)\right) dt \iff$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \int_a^x \left(f_n'(t) - g(t)\right) dt + f_n(a) - f(a) \right| \leq$$

$$\int_a^x |f_n'(t) - g(t)|\,dt + |f_n(a) - f(a)| \leq$$

$$\int_a^b \|f_n' - g\|_\infty\,dt + |f_n(a) - f(a)| \leftarrow \text{NON DIPENDE DA } x$$

DUNQUE

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq (b-a)\underbrace{\|f_n' - g\|_\infty}_{\to 0} + \underbrace{|f_n(a) - f(a)|}_{\to 0}$$

$\Rightarrow f_n \to f$ unif.

#

Se riguardo i controesempi vedo che in nessuno dei due casi

$f'_n \xrightarrow{\text{UNIF.}}$ qualcosa

TUTTO QUANTO VISTO FINORA SERVIRÀ NEL CASO DELLE <u>SERIE</u> di funzioni

<u>Ricordiamo le def. di serie</u>

Se (x_n) è una successione in uno spazio vettoriale X con una norma CHIAMO

- Somme parziali le $S_n := x_1 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$
- Dico che (x_n) è <u>SOMMABILE</u> se (S_n) ammette limite $S \in X$
- Chiamo SOMMA DELLA SERIE DEGLI x_n TALE LIMITE S e lo indico con $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ $(\in X)$
- Con abuso di linguaggio chiamo "serie" anche la succ. delle (S_n) e la indico spesso con "$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$" (dico che $\sum x_n$ converge ..)

NEL CASO CHE CI INTERESSA ABBIAMO UNA SUCC. DI funzioni $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ $A \subset \mathbb{R}^N$

e consideriamo $S_n : A \to \mathbb{R}^M$, le somme parziali, $S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

e analogamente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ (che è la funzione definita da $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$)

AUTOMATICAMENTE (per quanto visto) abbiamo DUE nozioni di "sommabilità" ("convergenza della serie").

(1) La serie delle f_n converge puntualmente se la succ. S_n converge puntualmente CIOÈ SE per ogni $x \in A$ la serie in $\mathbb{R}^N$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (le $f_n(x)$ sono sommabili in $\mathbb{R}^N$)

(2) La serie delle f_n converge uniformemente se le somme parziali S_n <u>convergono uniformemente</u> a una S (cioè esiste una $S : A \to \mathbb{R}^M$ tale che $\| S_n - S \|_\infty \to 0$

Come già detto CONV. UNIF. $\Rightarrow$ CONV. PT. Dunque posso dire in altro modo la (2)

(2') La serie delle f_n conv. UNIF. se

(a) $\forall x \in A$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge $\quad \left(\text{DUNQUE } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ che esiste} \right)$

(b)
$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \right\|_\infty = 0$$
$$\left(\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k - \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|_\infty \right)$$

<u>CRITERIO CHE ASSICURA LA CONV. UNIF. DI UNA SERIE</u>

Def. Siano $f_n : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^N$. DICO CHE la serie delle f_n converge TOTALMENTE se la serie (numerica!)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty \qquad (\text{è convergente})$$

($\simeq$ CONV. ASSOLUTA) (oss. se $a_n \geq 0$ esiste sempre $\sum a_n \in [0, +\infty]$)

TEOREMA Se la serie delle f_n è totalmente convergente $\Rightarrow$ la serie è UNIFORMEMENTE convergente

IDEA La conv. totale è di fatto la convergenza assoluta rispetto alla norma ∞. SI DIMOSTRA CHE $\mathcal{B}(A; \mathbb{R}^m)$ con la norma ∞ è uno spazio COMPLETO. PER UN Teorema generale (visto) si ha conv. assoluta $\Rightarrow$ convergenza (nella norma $\|\cdot\|_\infty$)

ESEMPIO $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$ Voglio considerare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$

NOTO SUBITO CHE la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti se fisso $x \in \mathbb{R}$ ho $0 \leq \dfrac{1}{n^2+x^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$ e so che $\sum^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

DUNQUE per ogni $x \in \mathbb{R}$ è ben definito $f(x) = \displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$

DOMANDA f è continua su $\mathbb{R}$? LA RISPOSTA SAREBBE SÌ se dimostrassi che la serie converge unif.

(tutti i teoremi visti sulle succ. di funzioni si trasferiscono alle serie)

PROVO CON LA CONV. TOTALE.

Devo vedere se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$

Calcoliamo allora $\|f_n\|_\infty = \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n^2+x^2} = \frac{1}{n^2}$

OTTIMO! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \Rightarrow$ CONV. TOTALE $\Rightarrow$ CONV. UNIF (su $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ è continua in x

ABBIAMO ANCHE UN'ALTRA CONSEGUENZA della conv. unif. su $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

(teorema dello scambio dei limiti: se $f_n(x) \xrightarrow{x\to x_0} \ell_n$ e $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f \Rightarrow$ $\ell_n \to \ell$ e $f(x) \xrightarrow{x\to x_0} \ell$ Qui $x_0 = +\infty$ che è di acc. per $\mathbb{R}$)

(è anche facile vedere che $f(x)$ è decrescente su $x>0$, ed è pari)

DOMANDA (+ complicata...) f è derivabile ?? $f' = \sum f_n'$??

PER QUESTO MI SERVE sapere che la serie delle derivate converge unif:

(INFATTI: se $S_n = f_1 + \dots + f_n \Rightarrow S_n' = f_1' + \dots + f_n'$. Se $S_n \to S$ e $S_n' \to W \Rightarrow S$ è derivabile e $S' = W$
$W = \sum_1^\infty f_n'$)

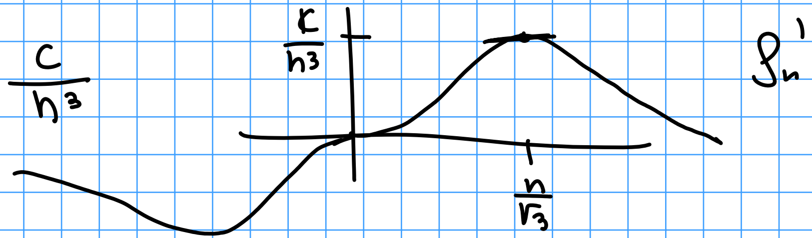
NEL NOSTRO CASO $g_n(x) = f_n'(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{n^2+x^2} = \frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}$

Studio il grafico di g_n $\quad g_n(0)=0 \quad g_n(\infty)=0$

$$g_n'(x) = \frac{-2(x^2+n^2)^{\cancel{2}} + 2x\, 2\cancel{(n^2+x^2)}\, 2x}{(n^2+x^2)^4} = \frac{-2x^2-2n^2+8x^2}{(n^2+x^2)^3} = \frac{6x^2-2n^2}{(n^2+x^2)^3}$$

$g_n'(x) = 0 \iff x = \pm \frac{n}{\sqrt{3}} \qquad g_n\left(\pm\frac{n}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\mp 2n/\sqrt{3}}{\left(n^2+\frac{n^2}{3}\right)^2} = \frac{\pm \text{cost}}{n^3}$

$\Rightarrow \|f_n'\|_\infty = \frac{c}{n^3}$



Dato che $\sum \frac{c}{n^3} < +\infty \Rightarrow f$ è C^1 e $f'(x) = \sum \frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}$

RICEVIMENTO SU TEAMS

Me 15/3 ore 16.00