Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 39   06/03/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

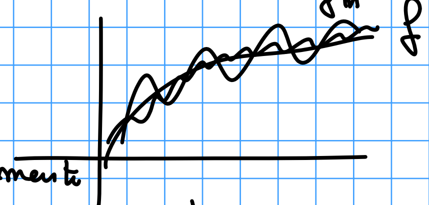
Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Successioni (e SERIE) di funzioni

MI CHIEDO IN CHE SENSO UNA SUCC. DI FUNZIONI f_n TENDA a una funzione f.

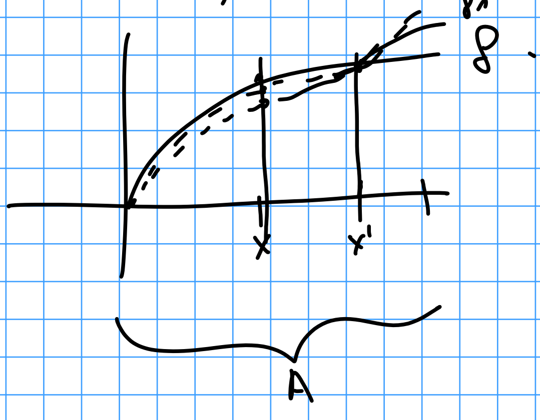
Sono date delle funzioni $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ $A \subset \mathbb{R}^N$

(quasi sempre $A \subset \mathbb{R}$ $f_n : A \to \mathbb{R}$), dove $n \in \mathbb{N}$, e $f : A \to \mathbb{R}^M$.



La prima cosa che viene in mente

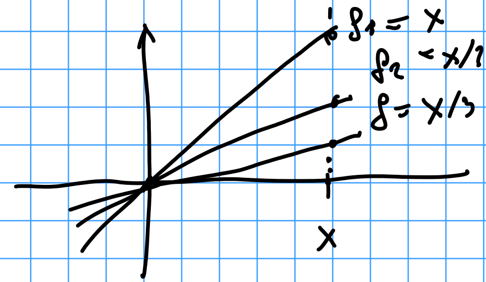
DEFINIZIONE (convergenza puntuale) Dico che f_n tende a f puntualmente, $f_n \xrightarrow{pt} f$, se $\forall x \in A$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$



OSS. La convergenza dipende anche da A. Si dice f_n tende a f puntualmente su A

Per esempio $f_n(x) = \frac{x}{n}$ allora $f_n \xrightarrow{pt} 0$ su $\mathbb{R}$ perché

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$



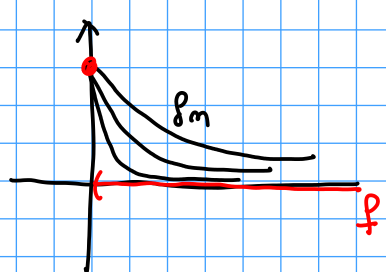
NOTA In quest'esempio non posso scambiare i limiti a $+\infty$

$$0 = \lim_{x\to\infty}\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} \neq \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{n} = +\infty$$

LA CONVERGENZA PUNTUALE NON GARANTISCE DUNQUE "LO SCAMBIO DEI LIMITI". Per esempio NON GARANTISCE:

f_n CONTINUE, $f_n \xrightarrow{pt} f \Rightarrow f$ continua ← FALSO

Per esempio $f_n(x) = e^{-nx}$ $\quad f_n: \underbrace{[0,+\infty[}_{A} \to [0,+\infty[$



Vedo che $\lim_{n\to\infty} e^{-nx} = \begin{cases} 0 & \text{se } x>0 \\ 1 & \text{se } x=0\end{cases}$

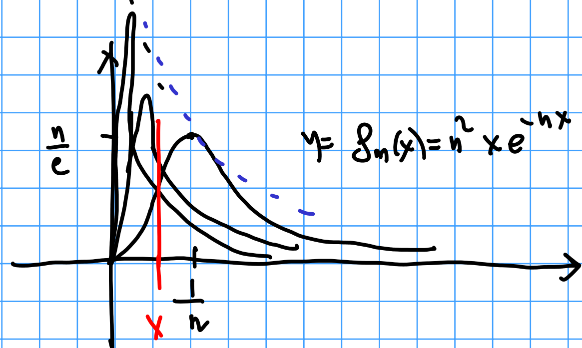
Dunque $f_n \xrightarrow{pt} f$ dove $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x>0\end{cases}$

f_n continue MA f è discontinua in $x=0$!!

DOMANDA La convergenza puntuale "VA D'ACCORDO" con l'integrale ??

ABBASTANZA MA NON COMPLETAMENTE. C'è il teorema della convergenza dominata: $f_n \xrightarrow{pt} f$ e se $|f_n| \le g$ (su E) g integrabile $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N (E)} f_n(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}^N (E)} f(x)\,dx$

CONTROESEMPIO (altro controesempio) $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$



$h(x) = x e^{-nx}$ $\qquad h(0) = h(+\infty) = 0$

$h'(x) = e^{-nx} - n x e^{-nx} = (1 - nx) e^{-nx}$

$h'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{n}$ $\qquad h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{ne}$

se faccio il limite puntuale trovo $\lim_{n \to +\infty} n^2 x e^{-nx} = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(se x è positivo $\Rightarrow$ l'esponenziale e^{-nx} vince su n^2) (se $x = 0$ $f_n(0) = 0 \to 0$)

DUNQUE $f_n(x) \xrightarrow{pt} 0$ Facciamo gli integrali su $\underbrace{]0, +\infty[}_{E}$:

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = n^2 \int_0^{+\infty} x e^{-nx}\,dx = n^2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{n}\right) e^{-y} \frac{dy}{n} \qquad y = nx \quad dy = n\,dx$$

$= \int_0^{+\infty} y e^{-y}\,dy$ e è un numero > 0 che non dipende da n.

$$\int_0^{+\infty} y e^{-y}\,dy = \underbrace{\left[y \frac{e^{-y}}{(-1)} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = 1$$

$\forall x \quad \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1$ $\qquad$ mentre $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 0$

ALTRO PROBLEMA : se $f_n \xrightarrow{pt} f$, f_n derivabili

POSSO dire che f è derivabile e che $f_n' \xrightarrow{pt} f'$

CHIARAMENTE NO , come prima posso prendere $f_n(x) = e^{-nx}$

MI SERVE UNA CONVERGENZA "PIÙ FORTE"

Possiamo cercare di introdurre una "DISTANZA" tra le funzioni

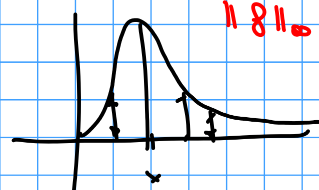
UNA POSSIBILE NORMA tra le funzioni è la

"NORMA INFINITO" definita come segue :

dato $f : A \to \mathbb{R}^M$ $\quad A \subset \mathbb{R}^N$ pongo

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} \|f(x)\|_{\mathbb{R}^N}$$

(si dimostra facilmente che è una norma - A PATTO CHE $\|f\|_\infty < +\infty$!!)



Per esempio $\quad f(x) = x e^{-nx}$

$A = [0, +\infty[$

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \geq 0} \left| x e^{-nx} \right| = \sup_{x \geq 0} x e^{-nx} = \max_{x \geq 0} x e^{-nx} = \frac{1}{ne}$$

$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{ne}$ $\qquad$ DUNQUE $\quad f_n \xrightarrow{\infty} 0$

Una volta definita la norma posso dire che $f_n \xrightarrow{\infty} f$ se $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

DIREMO in questo caso (quando $f_n \xrightarrow{\infty} f$) che f_n tende UNIFORMEMENTE a f. In effetti $\quad$ ($f_n : A \to \mathbb{R}^M$, $A \subset \mathbb{R}^N$)

$$f_n \xrightarrow{\infty} f \quad \text{significa che} \quad \lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^M} = 0$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \quad \sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^M} < \varepsilon \iff$$

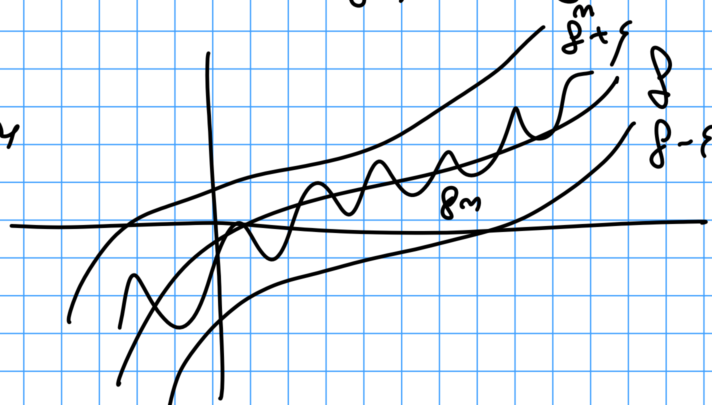
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \ \forall x \in A \quad \|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^M} < \varepsilon$$

Mettiamoci da essere in $\mathbb{R}$ ($M = 1$) $\quad$ allora viene

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \ \forall x \in A \quad f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ deve essere DEFINITIVAMENTE

$f - \varepsilon \leq f_n \leq f + \varepsilon$



FISSATO $\varepsilon > 0$ per n grande l'errore $f_n - f$ deve essere $< \varepsilon$ IN TUTTI I PUNTI

DUNQUE ABBIAMO VISTO CHE $x e^{-nx} \xrightarrow{\text{UNIF.}} 0$

(Ovvio sia $f_n \xrightarrow{\infty} f$ sia $f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} f$)

VICEVERSA se prendo $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ ho che $\|f_n\|_\infty = \frac{n}{e}$

e quindi f_n NON TENDE UNIF. A ZERO, mentre $f_n \xrightarrow{pt} 0$

(come visto prima) DUNQUE CONV. PT $\neq$ CONV. UNIF. !!!

TEOREMA Se $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{pt} f$. (su A)

Dim. Se $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^m} = 0$

Allora se fisso $x_0 \in A$ ho $0 \leq \|f_m(x_0) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \sup_{x\in A} \|f_m(x) - f(x)\|_{\mathbb{R}^m} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow f_n(x) \to f(x)$ e si ha la conv. puntuale #

LA CONV. PUNTUALE "INDIVIDUA" la possibile f, limite uniforme di f_n

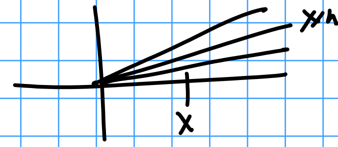
Altri esempi $\quad f_n(x) = \frac{x}{n}$. Se $A = \mathbb{R}$

trovo $\|f_n\|_\infty = +\infty$ infatti devo calcolare

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{1}{n} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x| = +\infty$$

DUNQUE f_n NON HANNO LIMITE UNIFORME: se f_n avesse lim. uniforme $f \Rightarrow f = 0$ (perché $f_n \xrightarrow{pt} 0$) e $\|f_n - f\|_\infty = +\infty$ che non tende a zero!!

$f_n \xrightarrow{pt} 0$ su $\mathbb{R}$ MA $f_n \cancel{\xrightarrow{\text{UNIF}} 0}$ su $\mathbb{R}$



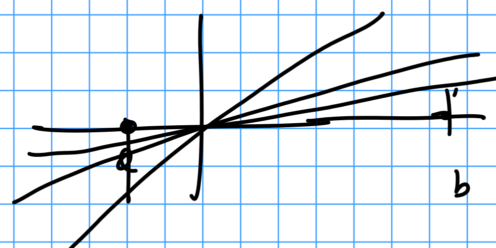
Se al posto di $\mathbb{R}$ considero $[a, b]$ (qualunque siano $a \leq b$ in $\mathbb{R}$) allora

$$f_n \xrightarrow{pt} 0 \quad \text{su } [a,b]$$

Per quanto riguarda la conv. unif devo calcolare

$$\sup_{a \leq x \leq b} \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{1}{n} \sup_{a \leq x \leq b} |x| = \frac{1}{n} \max(|a|, |b|) \to 0$$

DUNQUE $f_n \xrightarrow{UNIF} 0$ su $[a,b]$



TORNIAMO UN MOMENTO SU $\| \|_\infty$. QUESTA è effettivamente una norma se mi metto nelle <u>funzioni LIMITATE</u>

Se $A \subset \mathbb{R}^N$ chiamo $\mathcal{B}(A; \mathbb{R}^M) = \{f : A \to \mathbb{R}^M, \|f\| \text{ limitata}\}$

Allora $\mathcal{B}(A, \mathbb{R}^M)$ è uno spazio vettoriale e $\| \|_\infty$ è una norma su di lui (se $f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{R}^M)$ $\|f\|_\infty < +\infty$)

- le funzioni $f_n(x) = \frac{x}{n}$ non sono limitate se $A = \mathbb{R}$ ma sono limitate se $A = [a,b]$.

<u>Def.</u> Se A è limitato e chiuso in $\mathbb{R}^N$ posso considerare lo spazio

$$\mathcal{C}(A; \mathbb{R}^M) = \{ f : A \to \mathbb{R}^M, f \text{ continua} \}$$

Per Weierstrass $\mathcal{C}(A; \mathbb{R}^M) \subset \mathcal{B}(A; \mathbb{R}^M)$ e quindi la $\| \|_\infty$ è una norma su $\mathcal{C}(A; \mathbb{R}^M)$

QUESTO SPAZIO $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$ È CHIUSO IN $\mathcal{B}(A; \mathbb{R}^M)$

$\Uparrow$

<u>TEOREMA</u> Se $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE SU A e se tutte le

f_n sono continue $\Longrightarrow$ f è continua

(NO DIM.) In realtà c'è un un teorema più forte

TEOREMA (scambio di limiti)

Supponiamo (1) $f_n, f : A \to \mathbb{R}^M$ con $A \subset \mathbb{R}^N$, $f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} f$;

(2) x_0 sia pto di accumulazione per A; (x_0 può anche essere "∞")

(3) $\forall n$ $\exists$ $\ell_n := \lim_{x \to x_0} f_n(x)$

ALLORA (1) $\exists$ $\ell = \lim_{n \to \infty} \ell_n$

(2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

IN ALTRI TERMINI (PIÙ O MENO)

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

PER ESEMPIO Se torniamo a $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ si capisce che

f_n NON PUÒ TENDERE UNIFORMEMENTE A ZERO perché

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{n} = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} 0 = 0$$

ALTRO ESEMPIO (UN PO' BANALE)

$f_n(x) = e^{-nx}$ se mi metto su $A = [1, +\infty[$

ho la convergenza uniforme: $\sup_{x \geq 1} |e^{-nx}| = \sup_{x \geq 1} e^{-nx} = e^{-n}$

DUNQUE $\|f_n\|_\infty = e^{-n} \to 0$ DUNQUE $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} 0$

QUESTO VA D'ACCORDO CON IL FATTO CHE

$\forall n$ $f_n(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$ $\Rightarrow$ $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$ (è banale dato che $f \equiv 0$)

$f_n(x) = e^{-nx}$ NON CONV. UNIF. SU $[0,+\infty[$

(1) perché il limite puntuale è discontinuo

(2) perché $\|e^{-nx}\|_\infty = \sup_{x\geq 0} e^{-nx} = 1 \not\to 0$

(e so che se $f_n \xrightarrow{UNIF} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{UNIF} 0$ dato che $f_n \xrightarrow{pt} 0$)

$\|f_n - f\|_\infty = 1$ e non tende a zero

COME SI COMPORTA LA CONV. UNIF. RISPETTO ALLA DERIVATA ??

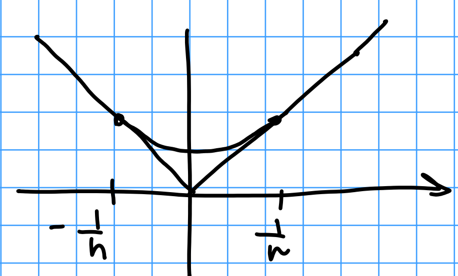
VEDIAMO CHE È FALSO (IN GENERALE) che:

$$f_n \xrightarrow{UNIF.} f, \quad f_n \text{ DERIVABILI} \Rightarrow f \text{ derivabile}, \quad f_n' \xrightarrow{??} f'$$

QUESTA IMPLICAZIONE PUÒ ANDARE MALE per DUE MOTIVI

(a) f non è derivabile   (b) f_n è derivabile ma $f_n' \xrightarrow{pt} f'$

VEDIAMO UN CONTROESEMPIO TIPO (a)



Prendo $f(x) = |x|$

(non è derivabile in $x=0$!!)

Approssimo f con funzioni derivabili

Dato n considero la parabola che passa per $\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ e $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ con derivata 1 in $\frac{1}{n}$ e -1 in $-\frac{1}{n}$

Per simmetria ho

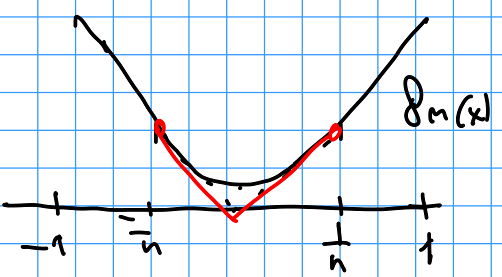
$$p(x) = a_n x^2 + b_n \quad \text{con}$$

$$p\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \iff \frac{a_n}{n^2} + b_n = \frac{1}{n} \iff b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$$

$1 = p'\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2a_n}{n} \iff a_n = \frac{n}{2}$

DUNQUE pongo $\boxed{f_n(x) = \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} \quad \text{se } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}}$, $\left(f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \quad f'\left(\frac{1}{n}\right) = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \right)$

$f_n(x) = |x|$ se x fuori da $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$



Vediamo che $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ IN $[-1,1]$ INFATTI

$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}} \left| \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} - |x| \right|$

(per simmetria) è PARI

$= \sup_{0 \leq x \leq \frac{1}{n}} \left| \underbrace{\frac{nx^2}{2} - x + \frac{1}{2n}}_{\substack{\text{derivata} = nx - 1 \\ \text{si annulla } x = \frac{1}{n}}} \right| \leftarrow ??$

in la funzione nello zero (sarà di minimo)

$\Rightarrow$ IL MAX è ASSUNTO IN $x = 0$

$\Rightarrow \quad \|f_n - f\|_\infty = f_n(0) - f(0) = \frac{1}{2n} (\to 0)$ $\quad f_n \to f$ UNIF.

HO TROVATO UNA SUCC. f_n di funzioni DERIVABILI (C^1) che tendono unif. a $|x|$ (non derivabile in $x=0$).