Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 38   01/03/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

ESERCIZI DI INTEGRAZIONE

$$I = \iint_Q \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy \qquad Q = [-1,1]\times[-1,1] = \{|x|\le 1,\ |y|\le 1\}$$
$$B = \{x^2+y^2\le 1\}$$

NON ESISTE PERCHÉ $\iint_Q \left|\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\right| dx\,dy \geq \iint_B \left|\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\right| dx\,dy = +\infty$

SAREBBE SCORRETTO DIRE CHE $\boxed{\cancel{I=0}}$ (anche se l'integrando e il dominio sono simmetrici)

SE INVECE CONSIDERO $\iint_Q \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ (DOMANDA: ESISTE?! SE SÌ QUANTO VALE?!)

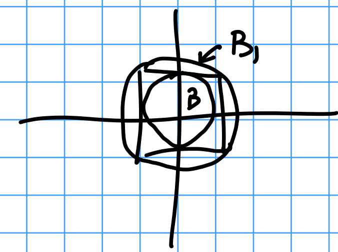
(posso convenire che l'integrando vale 0 x $x=y=0$).

$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ NON È CONTINUA IN ZERO NON SO SE È INTEGRABILE. SICURAMENTE È MISURABILE (CONTINUA ECCETTO CHE IN $(0,0)$)

Devo dunque vedere se $\iint_Q \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| dx\,dy = \begin{cases} +\infty \\ \in\mathbb{R}\end{cases}$??

Per vedere che questo integrale è finito posso calcolare

$$\iint_{B_1} \frac{|xy|}{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad B_1 = \{x^2+y^2 \le 2\}$$



$\parallel$ coord. polari

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \frac{|\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta|}{\rho^2}\,\rho\,d\rho =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\sin 2\theta| \int_0^{\sqrt{2}} \rho\,d\rho < +\infty \Rightarrow$$ L'INTEGRALE SU Q È $< +\infty$

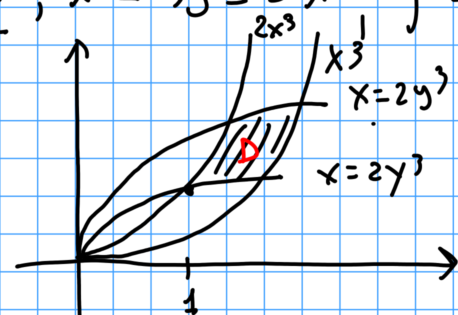
(Stesso discorso per $\int \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy$ quando $\alpha < 2$)

DUNQUE $\frac{xy}{x^2+y^2}$ è integrabile su Q

MA ALLORA (PER SIMMETRIA) $\iint_Q \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy = 0$

\#

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{xy} \qquad D = \{(x,y) : \underline{x>0,\, y>0},\ x^3 \le y \le 2x^3 \quad y^3 \le x \le 2y^3\}$$



CONVIENE INTRODURRE $\xi = \frac{y}{x^3}$ $\quad \eta = \frac{x}{y^3}$ $\quad$ (D diventa $1 \le \xi \le 2$, $1 \le \eta \le 2$)

DEVO INVERTIRE LA TRASFORMAZIONE $(x,y) \xrightarrow{\Psi} (\eta,\xi)$ $\quad (\Phi = \Psi^{-1})$

e cioè ricavo x e y in termini di (ξ,η), risolvendo

$$\begin{cases} y = x^3\xi \\ x = y^3\eta \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x^3\xi \\ x = (x^3\xi)^3\eta \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x^3\xi \\ \cancel{x}\,1 = x^{\cancel{9}\,8}\xi^3\eta \end{cases}$$

$(x^8\xi^3\eta = 1)$

$(x>0,\ y>0)$

$$\begin{cases} y = \xi^{-\frac{1}{8}}\eta^{-\frac{3}{8}} \\ x = \xi^{-\frac{3}{8}}\eta^{-\frac{1}{8}} \end{cases}$$

DUNQUE HO $(x,y) = \phi(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \xi^{-3/8}\,\eta^{-1/8} \\ \xi^{-1/8}\,\eta^{-3/8} \end{pmatrix}$

e voglio usare il teorema di cambio di variabili

$f(x,y) = \frac{1}{xy}$ $\qquad D_1 = \{1 \le \xi \le 2,\ 1 \le \eta \le 2\}$

$$\iint_{\phi(D_1)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f\circ\phi(\xi,\eta)\,\left|\det J_\phi(\xi,\eta)\right|\,d\xi\,d\eta$$

ABBIAMO $f\circ\phi(\xi,\eta) = \frac{1}{(\xi^{-3/8}\eta^{-1/8})}\,\frac{1}{(\xi^{-1/8}\eta^{-3/8})} = \frac{1}{\xi^{-1/2}\eta^{-1/2}} = \xi^{\frac12}\eta^{\frac12}$

$$J_\phi = \begin{bmatrix} -\frac38 \xi^{-11/8}\eta^{-1/8}, & -\frac18 \xi^{-3/8}\eta^{-9/8} \\ -\frac18 \xi^{-9/8}\eta^{-3/8} & -\frac38 \xi^{-1/8}\eta^{-11/8} \end{bmatrix}, \quad \det J_\phi = \frac{9}{64}\xi^{-\frac32}\eta^{-\frac32} - \frac{1}{64}\xi^{-\frac32}\eta^{-\frac32}$$

$$= \frac18 \xi^{-\frac32}\eta^{-\frac32}$$

DUNQUE L'INTEGRALE DIVENTA $\frac18 \int_1^2 \xi^{-\frac32}\xi^{\frac12}\,d\xi \int_1^2 \eta^{-\frac32}\eta^{\frac12}\,d\eta =$

$$\frac18\left(\int_1^2 \frac{d\xi}{\xi}\right)\left(\int_1^2 \frac{d\eta}{\eta}\right) = \frac18\left(\ln\xi\,\Big|_1^2\right)^2 = \boxed{\frac18 \ln^2(2)}$$

HO USATO: $\psi(x,y) = \left(\frac{y}{x^3}, \frac{x}{y^3}\right)$ da $\Omega = \{x>0, y>0\}$ in $\Omega_1 = \{\xi>0, \eta>0\}$

HO CALCOLATO $\phi = \psi^{-1}$ da $\Omega_1 \to \Omega$

(i calcoli mostrano che ψ è invertibile su Ω)

e noto che $\psi(D) = D_1 = \{1 \le \xi \le 2,\ 1 \le \eta \le 2\}$

APPLICO LA FORMULA $\iint_{D_1} f(\phi(\xi,\eta))\,|\det J_\phi(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta =$

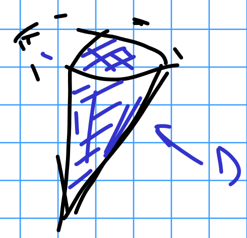
$\iint_{\phi(D_1)} f(x,y)\,dx\,dy$

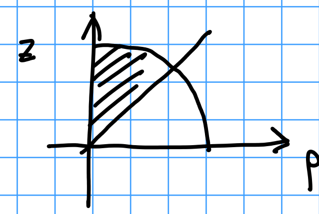
$(\phi(D_1) = D$!!$)$

$$\iiint_D \frac{xyz}{1+x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz \quad \left(= \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\right)$$

$D = \{x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z^2 \ge x^2+y^2,\ x>0, y>0, z>0\}$

OSSERVIAMO CHE D si può ottenere ruotando di $90°$ attorno all'asse z l'insieme E nel piano (ρ, z) definito da $E = \{\rho^2+z^2 \le 1,\ z \ge \rho\}$





se voglio seguire questa idea sarei portato al passaggio in coord. cilindriche (polari in xy e z rimane..) PERÒ l'espressione dell'integrando si complica un po'. È POSSIBILE COMUNQUE FARE COSÌ

È MEGLIO USARE LE COORDINATE SFERICHE

$x = (\rho\cos\theta\sin\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\varphi)$

f diventa: $$\frac{\rho^3\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\cos\varphi}{1+\rho^2}$$

$$dx\,dy\,dz = \rho^2\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi\,d\rho$$

come cambio D ??

$x^2+y^2+z^2 \le 1 \iff \rho^2 \le 1 \iff \boxed{0 \le \rho \le 1}$

$x, y, z \ge 0 \iff 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\ \ \boxed{0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}}$

$z^2 \ge x^2+y^2 \iff \rho^2\cos^2\varphi \ge \rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi = \rho^2\sin^2\varphi$

$$\iff \cos^2\varphi \geq \sin^2\varphi \overset{\text{(per quanto sopra)}}{\iff} \cos\varphi \geq \sin\varphi$$

$$\boxed{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta}_{1} \underbrace{\int_0^{\pi/4} \sin^3\varphi \cos\varphi}_{2} \underbrace{\int_0^1 \frac{\rho^5}{1+\rho^2} d\rho}_{3}$$

$$1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

$$2 = \int_0^{\sqrt{2}/2} s^3 \, ds \qquad s = \sin\varphi$$

$$3 = \frac{1}{2}\int \frac{s^2}{1+s} ds = \dots$$