Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 37 02/28/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Teorema Se $f, g, f_n : \mathbb{R}^N (E) \to [-\infty, \infty]$ g integrabile f_n misurabili su E

e vale $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R} \ E$ $\forall n$

($\Rightarrow$ $|f_n|$ è integrabile $\Leftrightarrow$ f_n integrabili)

e inoltre $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N (E)$

ALLORA f è integrabile e

$$\int_{\mathbb{R}^N\, E} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N\, E} f_n(x)\,dx$$

OSS. Lo stesso vale se sostituisco $\mathbb{R}^N$ con $E \subset \mathbb{R}^N$ e le funzioni sono misurabili su E (basta estendere le f_n con valore zero fuori da E e applicare il teorema)

RIVEDIAMO IL CONTROESEMPIO

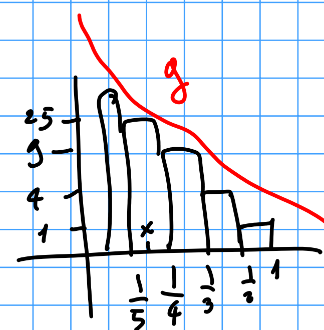
$$f_n(x) = n^2\, \mathbb{1}_{]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}(x) = \begin{cases} n^2 & \text{se } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{fuori da }]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

Si è visto che $f_n(x) \to 0 \quad \forall x$ ma

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n^2}{n(n+1)} \to 1 \neq \int_{\mathbb{R}} 0\,dx = 0$$

IN EFFETTI È CHIARO CHE NON PUÒ ESISTERE g integrabile con $f_n(x) \le g(x) \quad \forall x \ \forall n$. Se una g verifica queste disuguaglianze $\Rightarrow$

$$n^2 \le g(x) \quad \text{se } \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}$$



Dunque $g(x) \ge \varphi(x)$

$$\text{dove} \quad \varphi(x) = \begin{cases} n^2 & \text{se } \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n} \\ 0 & x \le 0 \ , \ x > 1 \end{cases}$$

Ma $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx =$

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \varphi(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2}{n(n+1)}}_{\to 1} = +\infty$$

$\Rightarrow$ φ NON È INTEGRABILE (è misurabile in quanto è continua tranne che nei punti $x_n = \frac{1}{n}$ che sono un insieme numerabile)

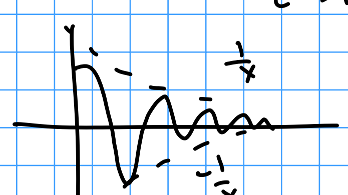
$\Rightarrow$ se $g \ge \varphi$ $\Rightarrow$ g non è integrabile.

CONTROESEMPIO $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{x}\,dx$

So che l'integrale converge secondo Riemann IMPROPRIO (VISTO AD. A1)

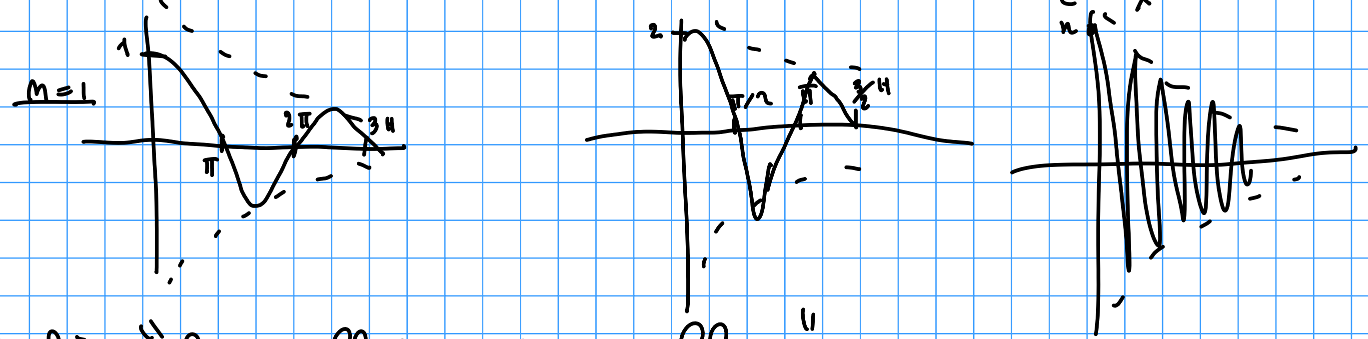
ma non converge assolutamente secondo Riemann IMPROPRI

(esiste finito $\displaystyle\lim_{c\to+\infty} \int_0^c \frac{\sin(nx)}{x}\,dx =: \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{x}\,dx$



)

SI PUÒ DIM. che se $M > \varepsilon > 0 \Rightarrow \int_\varepsilon^M \frac{\sin(nx)}{x}\,dx \xrightarrow{n\to+\infty} 0$



perché "le oscillazioni si cancellano"

(FATTO: se f contin. su $[a,b]$ $\int_a^b f(x)\sin(nx) \xrightarrow{n\to\infty} 0$)

D'ALTRA PARTE $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{x}\,dx = (y = nx \quad dy = n\,dx)$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{(y/n)}\left(\frac{1}{n}\right)dy = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,dy \;\; \text{è} \;\; \text{costante}$$

COSA RICAVO DA QUESTI CALCOLI $\rightsquigarrow$

"L'INTEGRALE VA A CONCENTRARSI O A ZERO O A $+\infty$

questo è analogo all'esempio precedente $f_n(x) = n^2 \mathbb{1}_{]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[}$

in cui l'integrale va a concentrarsi in zero

$\rightsquigarrow$ per descrivere "la densità di massa concentrata" in un punto non mi bastano le funzioni (...)"

In fenomeni di concentrazione il teorema di Lebesgue non funziona.

L'ipotesi di convergenza dominata è fatta per impedire fenomeni di concentrazione.

ALTRE VERSIONI DEL TEOR. DI LEBESGUE
(INTEGRALI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO)

Supponiamo di avere $f(x,y)$ $\quad y \in \mathbb{R}^N \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^M$

Ω aperto (x è un parametro). Supponiamo che

(a) f sia continua in (x,y) (su y basterebbe molto meno ..)

(b) $\exists\ g : \mathbb{R}^N \to [0,+\infty]$ integrabile su $\mathbb{R}^N$ e tale che

$$|f(x,y)| \leq g(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^N \text{ e } \forall x \in \Omega$$

Allora è chiaro che per ogni x di Ω la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è integrabile su $\mathbb{R}^N$. DUNQUE POSSO DEFINIRE

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,dy$$

TESI F è continua. In altri termini $\forall x_0 \in \Omega$

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$$

che è come dire (passaggio al limite sotto il segno di integrale)

$$\lim_{x\to x_0} \int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x_0,y)\,dy \quad \Big(= \int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{\lim_{x\to x_0}}_{f \text{ è continua}} f(x,y)\,dy \Big)$$

Se aggiungiamo ipotesi a f:

(a_1) f è continua in (x,y) ed è anche derivabile rispetto a x ($\exists\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)$ $i=1..M$, $\forall x\ \forall y$) e $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sono continue in (x,y)

(b_1) $\exists\ g : \mathbb{R}^N \to [0,+\infty]$ integrabile per cui

$$|f(x,y)| \leq g(y)$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\right| \leq g(y) \qquad \forall x \in \Omega\ \forall y \in \mathbb{R}^N \quad \forall i = 1 \dots M$$

TESI F è $C^1(\Omega)$ e

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\,dy \qquad \forall x \in \Omega \quad \forall i = 1 \dots M$$

OSS. Si può sempre sostituire $\mathbb{R}^N$ con un $E \subset \mathbb{R}^N$ E misurabile

ESEMPIO $$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xy^2}\,dy \qquad x > 0$$

$\Omega = \{x > 0\} =]0, +\infty[$, $N = 1$, $(y \in \mathbb{R})$ $\qquad f(x,y) = e^{-xy^2}$

Si vede facilmente che, dato $x > 0$, e^{-xy^2} è integrabile su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$F(x)$ è ben definita $\forall x > 0$.

DOMANDA Posso affermare che F è continua su $]0, +\infty[$

Provo a usare il Teorema (l'ultimo) Mi servirebbe una $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ integrabile su $\mathbb{R}$ tale che

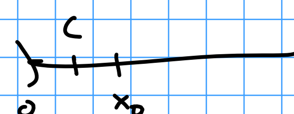
$$(*) \qquad e^{-xy^2} \le g(y) \qquad \forall x > 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$$

QUESTO PURTROPPO NON RIESCE. Se $(*)$ fosse vero $\Rightarrow$ potrei far tendere x a 0^+ e ottenere $1 \le g(y)$ $\forall y \in \mathbb{R}$ MA se $g \ge 1$ g non può essere integrabile su $\mathbb{R}$!!

PERÒ POSSO NOTARE CHE la continuità di F su $]0, +\infty[$ $\Leftrightarrow$ F è continua in x_0 $\forall x_0 > 0$.

ALLORA POSSO FISSARE $x_0 > 0$ e cercare di dimostrare che F è continua in x_0. Per farlo prendo $c = \frac{x_0}{2}$

Mi restringo a $\Omega_1 =]c, +\infty[$ e cerco



g tale che

$$(**) \qquad e^{-xy^2} \le g(y) \qquad \forall y \in \mathbb{R} \ \forall x > c$$

g la TROVO: per esempio $g(y) = e^{-cy^2}$. è chiaro che

$$\underbrace{e^{-xy^2} \leq e^{-cy^2}}_{} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall x > c$$

INTEGRABILE in y $(c>0)$

USANDO IL TEOREMA per la restrizione a $\Omega_1 \times \mathbb{R}$ ottengo che

F è continua su $]c, +\infty[$

IN PARTICOLARE F è continua in x_0 !!

Se ripeto il ragionamento per ogni $x_0 > 0$ ottengo che che F è continua su $]0, +\infty[$.

- Posso anche dimostrare che F è C^1. Come prima: Fisso x_0 prendo $c = \frac{x_0}{2}$ $(< x_0)$ e cerco una g integrabile in y tale che

$$e^{-xy^2} \leq g(y) \qquad \forall y \quad \forall x > c$$

$$\left|-y^2 e^{-xy^2}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x} e^{-xy^2}\right| \leq g(y) \qquad \forall y \quad \forall x > c$$

Posso prendere $g_1(y) = y^2 e^{-cy^2}$ ← INTEGRABILE (se $c>0$)

e g_1 funziona sulla seconda disuguaglianza.

Allora se prendo $g(y) = (1+y^2)e^{-cy^2}$ questo va bene in entrambe le disuguaglianze. ⇒ POSSO APPLICARE IL TEOREMA

$\Rightarrow$ F è C^1 su $]c, +\infty[$ e vale

$$F'(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-xy^2}\, dy \qquad \forall x > c$$

Dato che $c>0$ è arbitrario ottengo che F è C^1 su $]0, +\infty[$ e che

$$F'(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-xy^2}\, dy \quad \forall x > 0$$

TUTTO QUESTO SI POTEVA FARE MOLTO PIÙ semplicemente notando che

$(x>0)$ $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xy^2}\,dy$ $\quad$ se pongo $\sqrt{x}\,y=t \Rightarrow$

$\sqrt{x}\,dy=dt$

da cui $F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{x}}\,e^{-t^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\pi}$

Però se invece avessi $F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\sqrt{1+y^4}}\,dy$

il cambio di variabile non funziona mentre il teorema si può usare nello stesso modo.

Facciamo qualche integrale (preso dai vecchi compiti mi)

DOMANDA $\quad$ Dato $f(x,y):=\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad f(0,0)=0$

(DECISIONE ARBITRARIA)

Posso dire che
- f è integrabile su Q ?
- f ammette integrale su Q ?

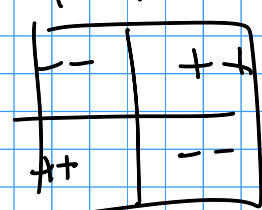
$Q=[-1,1]\times[-1,1]$
$=\{|x|\le 1,\ |y|\le 1\}$

NOTA che f è misurabile perché f è continua tranne che in $(0,0)$ e $\{(0,0)\}$ è trascurabile (f è continua quasi ovunque).

NOTA Se fosse $f\ge 0 \Rightarrow f$ ammetterebbe integrale (in quanto misurabile)

TALE INTEGRALE POTREBBE FARE $+\infty$

MA NON È COSÌ perché f cambia segno



DUNQUE IN QUESTO CASO f AMMETTE INTEGRALE $\Leftrightarrow$ f INTEGRABILE

$\Leftrightarrow$ $|f|$ INTEGRABILE $\Leftrightarrow$ $\iint_Q |f| < +\infty$

ESISTE (|f| AMMETTE INTEGRALE!!)

QUELLO CHE DEVO FARE È VEDERE SE

$\iint_Q \dfrac{|xy|}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$ è finito o infinito

$$= 4\int_0^1\int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = 4\int_0^1 x \int_0^1 \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\,dy =$$

$$4\int_0^1 \frac{x}{x^4} \underbrace{\int_0^1 \frac{y}{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2}\,dy}$$

$y=sx$ $\quad \frac{y}{x}=s$ $\quad dy = x\,ds$ $\quad$ (nell'integrale interno)

$$4\int_0^1 \frac{1}{x^3}\int_0^{1/x} sx\,\frac{x\,ds}{(1+s^2)^2} = 4\int_0^1 \frac{1}{x}\left(\int_0^{1/x}\frac{s\,ds}{(1+s^2)^2}\right)dx =$$

$$4\int_0^1 \frac{g(x)}{x}\,dx \qquad \text{dove } g(x)=\int_0^{1/x}\frac{s\,ds}{(1+s^2)^2}$$

g è continua e $\lim_{x\to0} g(x) = \int_0^{+\infty}\frac{s\,ds}{(1+s^2)^2}=c$

ALLORA $\frac{g(x)}{x}\simeq \frac{c}{x}$ che non è integrabile in x!!

DUNQUE 8 non è int. e non ammette lim.

MODO ALTERNATIVO per dim. che:

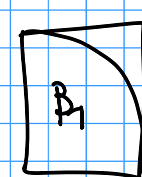
$$\iint_{Q_1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = +\infty \qquad Q_1=[0,1]\times[0,1]$$

MI BASTA DIM. CHE

$$\iint_{B_1}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy=+\infty$$

$B=\{x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$

$B_1 \subset Q_1$



4

posso usare le coord. polari

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta}{\rho^4}\,\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta}_{>0}\ \underbrace{\int_0^1\frac{d\rho}{\rho}}_{=+\infty}$$