Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 35 16/12/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Esercizio Per quali $\alpha>0$ la seguente funzione è integrabile su $\mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z)=\frac{1}{1+|x|^\alpha+|y|^\alpha+|z|^\alpha}$$

Usiamo Tonelli: ($f\geq 0$, f continua dunque misurabile)

$$\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{dx\,dy\,dz}{1+|x|^\alpha+|y|^\alpha+|z|^\alpha}=\iint_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{dz}{\underbrace{1+|x|^\alpha+|y|^\alpha}_{\text{lo metto in evidenza}}+|z|^\alpha}\right)dx\,dy=$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{1+|x|^\alpha+|y|^\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{dz}{1+\frac{|z|^\alpha}{1+|x|^\alpha+|y|^\alpha}}\right)dx\,dy=$$

sostituzione $t=\dfrac{z}{(1+|x|^\alpha+|y|^\alpha)^{1/\alpha}}$

$dz=(1+|x|^\alpha+|y|^\alpha)^{1/\alpha}\,dt$

$$=\iint_{\mathbb{R}^2}(1+|x|^\alpha+|y|^\alpha)^{(1/\alpha-1)}\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\frac{dt}{1+|t|^\alpha}}_{\text{finito}\iff\boxed{\alpha>1}}$$

$$\left(\int_1^\infty\frac{dx}{x^\alpha}<+\infty\iff\alpha>1\right)$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\frac{dt}{1+|t|^\alpha}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{dy}{(\underbrace{1+|x|^\alpha}_{\text{lo metto in evidenza}}+|y|^\alpha)^{1-1/\alpha}}\right)dx=2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^\alpha}\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{(1+|x|^\alpha)^{1-\frac{1}{\alpha}}}\int_{\mathbb{R}}\frac{dy}{\left(1+\frac{|y|^\alpha}{1+|x|^\alpha}\right)^{1-\frac{1}{\alpha}}}$$

sost. $s=\dfrac{y}{(1+|x|^\alpha)^{1/\alpha}}$

$dy=\underbrace{(1+|x|^\alpha)^{1/\alpha}}\,ds$

$$2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^\alpha}\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{(1+|x|^\alpha)^{1-\frac{2}{\alpha}}}\int_{\mathbb{R}}\frac{ds}{(1+|s|^\alpha)^{1-\frac{1}{\alpha}}}=$$

$$8\left(\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^\alpha}\right)\left(\int_0^{+\infty}\frac{ds}{(1+s^\alpha)^{1-1/\alpha}}\right)\left(\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^\alpha)^{1-2/\alpha}}\right) \leftarrow \simeq \frac{1}{(x^\alpha)^{1-\frac{2}{\alpha}}} = \frac{1}{x^{\alpha-2}}$$

che converge $\Updownarrow$ $\alpha-2>1$ $\Updownarrow$ $\boxed{\alpha>3}$

finita $\Leftrightarrow \boxed{\alpha>1}$

(a $+\infty \simeq \frac{1}{s^{\alpha(1-1/\alpha)}} = \frac{1}{s^{\alpha-1}}$ che converge $\Leftrightarrow$ $\alpha-1>1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha>2}$

IN DEFINITIVA f è integrabile $\Longleftrightarrow \boxed{\alpha>3}$

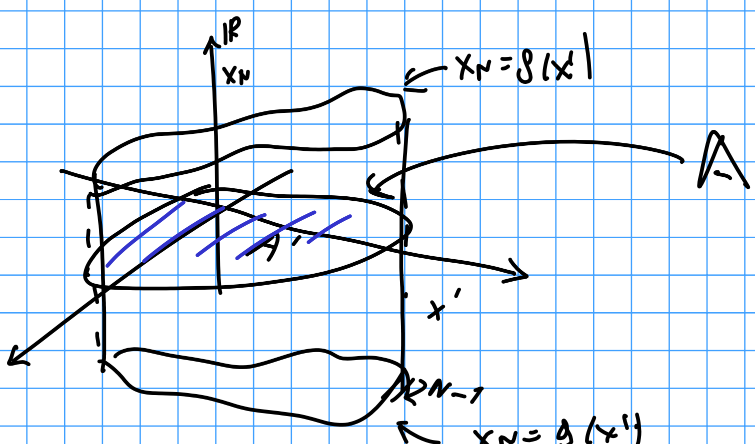
Def. (INSEMI NORMALI RISPETTO A UN ASSE)

IN $\mathbb{R}^N$ decompongo $x=(x_1 \cdots x_N) = (x', x_N)$ $\quad x'=(x_1\cdots x_{N-1})$

DICO CHE $A\subset\mathbb{R}^N$ è NORMALE RISPETTO A x_N se

ESISTE $A'\subset\mathbb{R}^{N-1}$, esistono $f,g : A'\to\overline{\mathbb{R}}$ misurabili con $f\le g$ e

$$A=\{(x',x_N) : x'\in A',\ g(x')\le x_N\le f(x')\}$$



PROP. Se A è come sopra e se $h: A\to[-\infty,+\infty]$ misurabile su A con $h\ge0$ OPPURE f integrabile su A $\Longrightarrow$

$$\int_A h(x)\,dx = \int_{A'}\left(\int_{g(x')}^{f(x')} f(x',x_N)\,dx'\right)dx_N$$

(FACILE CONSEGUENZA di FUBINI/TONELLI)

Come al solito nel caso $h \geq 0$ il risultato può essere $+\infty$.

SI PUÒ FARE UNA DEF. PIÙ GENERALE (e un risultato analogo) dicendo che A è NORMALE RISPETTO A x_i (i tra 1 ed N) scrivendo $X = (x_1 \dots x_N) = (x_1 \dots x_{i-1}, x_i, x_{i+1} \dots x_N)$

$X' = (x_1 \quad x_{i-1} \quad x_{i+1} \dots x_N) \qquad x_i$

ESEMPIO (di nuovo il volume della palla $B = \{x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$)

Devo calcolare

$$|B| = \iiint_B 1 \, dx\,dy\,dz$$

B è normale rispetto a x / y / z

Rispetto a x: $B = \{(x,y,z): \ (y,z) \in B' \ \underbrace{-\sqrt{R^2-y^2-z^2}}_{g} \leq x \leq \underbrace{\sqrt{R^2-y^2-z^2}}_{f}\}$

$$B' = \{y^2+z^2 \leq R^2\}$$

Rispetto a y: $B = \{(x,y,z): \ (x,z) \in B' \ -\sqrt{R^2-x^2-z^2} \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2-z^2}$

Rispetto a z ...

$$|B| = \iint_{B'} \left(\int_{-\sqrt{R^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-y^2-z^2}} dx \right) dy\,dz = 2 \iint_{B'} \left[x \right]_0^{\sqrt{R^2-y^2-z^2}} dy\,dz =$$

$$2 \iint_{B'} \sqrt{R^2-y^2-z^2} \, dy\,dz = \otimes$$

Anche B' è normale sia rispetto a y che rispetto a z:

$$B' = \{(y,z): -R \leq z \leq R \ -\sqrt{R^2-z^2} \leq y \leq \sqrt{R^2-z^2}\}$$

$$= \{(y,z): -R \leq y \leq R \ -\sqrt{R^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2-y^2}\}$$

$$\otimes \quad 2 \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \sqrt{R^2-y^2-z^2} \, dz \right) dy = 8 \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \sqrt{R^2-y^2-z^2} \, dz \right) dy =$$

$$8 \int_0^R \sqrt{R^2-y^2} \left(\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \sqrt{1 - \frac{z^2}{R^2-y^2}} \, dz \right) dy \qquad t = \frac{z}{\sqrt{R^2-y^2}} \quad dz = \sqrt{R^2-y^2}\, dt$$

$$= 8\int_0^R (R^2-y^2)\left(\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt\right) dy \qquad y = Rs \quad dy = R\,ds$$

$$= 8R\int_0^1 (R^2-R^2s^2)\,ds \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = 8R^3\int_0^1 (1-s^2)\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$8R^3 \underbrace{\left[s-\frac{s^3}{3}\right]_0^1}_{1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}} \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{16}{3}\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt \; R^3$$

$$t = \sin\theta \qquad dt = \cos\theta\,dt \qquad = \frac{16R^3}{3}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta =$$

$$\frac{16R^3}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta)\,d\theta = \frac{16R^3}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta =$$

$$\frac{16}{3}R^3\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{16}{3}R^3\frac{\pi}{4} = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \#$$

ESEMPIO Per quali $\alpha > 0$ è integrabile la funzione $\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} = \frac{1}{\|(x,y)\|^{2\alpha}}$ nell'insieme $B = \{x^2+y^2 \le 1\}$

$$\iint_B \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{(x^2+y^2)^\alpha}\right) dx = 2\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|^{2\alpha}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^\alpha}$$

qui se $x=0$ trovo degli infiniti

NIENTE DI MALE !!

$$= 4\int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^\alpha} =$$

$s = \frac{y}{x}$ (ha senso se $x > 0$!)

$y = xs$ ($\{0\}$ è trascurabile in $\mathbb{R}$!!)

$dy = x\,ds$

$$4\int_0^1 \frac{x}{x^{2\alpha}}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}/x} \frac{ds}{(1+s^2)^\alpha}\right) dx$$

$$\underbrace{4\int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha-1}}F(x)\,dx} \qquad \text{dove } F(x) = \int_0^{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} \frac{ds}{(1+s^2)^\alpha}$$

MI SERVE CAPIRE COSA $F(x)$ se $x \to 0$. $F(x) \to \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(1+s^2)^\alpha}$

QUESTO INTEGRALE è $< +\infty$ se $\alpha > 1/2$.

DUNQUE se $\alpha > \frac{1}{2}$ $\quad \frac{F(x)}{x^{2\alpha-1}} \simeq \frac{\text{cost}}{x^{2\alpha-1}} \leftarrow$ INTEGRABILE su $[0,1]$

$\iff 2\alpha-1 < 1$

$\iff 2\alpha < 2 \iff \boxed{\alpha < 1}$

DUNQUE f è integrabile per $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

$\int_0^1 \frac{ds}{s^\alpha} < +\infty \iff \alpha < 1$

$\int_1^{+\infty} \frac{ds}{s^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1$

NON È ANCORA CHIARO COSA SUCCEDE PER $0 < \alpha \leq 1/2$ ($F(x) \to +\infty$ per $x \to 0$)

SUPPONIAMO $\alpha \leq 1/2$. Fissiamo $\beta > 0$ e calcoliamo

$$\lim_{x \to 0} x^\beta F(x) =$$

(MI PIACEREBBE TROVARE β per cui viene un limite finito)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} \frac{ds}{(1+s^2)^\alpha}}{\frac{1}{x^\beta}} \overset{\text{Hôpital}}{=}$$

$$\left(\frac{d}{dx} \int_0^{\varphi(x)} h(s)\,ds = h(\varphi(x))\,\varphi'(x) \right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}-1\right)^\alpha} \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}{-\beta x^{-\beta-1}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{\frac{1}{x^2}}\right)^\alpha \frac{-2x^{-3}}{2\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}}{-\beta x^{-\beta-1}} =$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-x^{2\alpha-3}}{-\beta x^{-\beta-1}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{2\alpha-3}}{\beta x^{-\beta-1}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\frac{1}{\beta} \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{2\alpha-2}}{x^{-\beta-1}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

HA LIMITE FINITO QUANDO

$$-\beta - 1 = 2\alpha - 2 \iff$$

$$-\beta = 2\alpha - 1 \qquad \boxed{\beta = 1 - 2\alpha}$$

$\beta > 0$ se $\alpha < \frac{1}{2}$ (il caso $\alpha = 1/2$ lo lascio perdere)

DUNQUE HO TROVATO CHE

$$x^{1-2\alpha} F(x) \to \frac{1}{1-2\alpha} \quad \text{quando } \alpha < \frac{1}{2}$$

$$\iff \boxed{F(x) \simeq \frac{1}{1-2\alpha} \frac{1}{x^{1-2\alpha}}}$$

$\Rightarrow$ l'integrando che ci interessa è $\simeq \frac{1}{1-2\alpha} \frac{1}{x^{1-2\alpha}} \frac{1}{x^{2\alpha-1}} = \frac{1}{1-2\alpha}$

<u>DUNQUE</u> se $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ la f è integrabile

(funzioni nulle per $\alpha = 1/2 \ldots$) e alla fine

f è integrabile se e solo se $\boxed{0 < \alpha < 1}$

Lo rifacciamo in modo più semplice dopo - passando a coordinate polari

FORMULA DI CAMBIO DI VARIABILE

- Suppongo che Ω e Ω_1 siano due aperti di $\mathbb{R}^N$ e che $\Phi : \Omega \to \Omega_1$ sia di classe C^1, invertibile e che Φ^{-1} di classe C^1 (Φ è un "DIFFEOMORFISMO")
- Suppongo che $f : \Omega_1 \to [-\infty, +\infty]$ misurabile su Ω_1

Allora

(1) La funzione $(f \circ \Phi) |\det J_\Phi| : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ è misurabile su Ω

Se poi f è integrabile su $\Omega_1 \Rightarrow (f \circ \Phi)|\det J_\Phi|$ è integrabile su Ω.

(2) Vale la formula

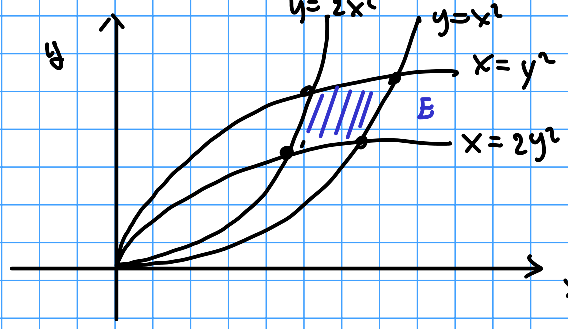
$$\int_\Omega f(\Phi(x)) |\det J_\Phi(x)| \, dy = \int_{\Omega_1} f(y) \, dy$$

se $f \geq 0$ oppure se f è integrabile

(nel caso $f \geq 0$ misurabile posso avere $+\infty$ come risultato)

ESEMPIO Considero l'insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ definito da:

$$E = \{ (x,y) : \ y^2 \le x \le 2y^2, \quad x^2 \le y \le 2x^2, \ x>0, y>0 \}$$



SI VEDE CHE

$(x,y) \in E \Rightarrow x>0 \ y>$

$\left((x,y) \in E \Leftrightarrow 1 \le \xi \le 2 \ \ 1 \le \eta \le 2 \quad \psi(E) = [1,2]\times[1,2] \right)$

Voglio trovare $|E| = \iint_E 1\,dxdy$ Conviene introdurre due nuove variabili

$$\xi := \frac{x}{y^2} \qquad \eta = \frac{y}{x^2} \qquad \left(\Psi(x,y) = \frac{x}{y^2}, \frac{y}{x^2} \right)$$

$$\psi(x,y) = (\xi, \eta)$$

CALCOLO $\phi(\xi,\eta) = (\Psi^{-1})(\xi,\eta)$ INVERSO ψ:

devo ricavare x e y dal sistema ($\xi, \eta > 0$ per come mostrato)

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x}{y^2} \\ \eta = \dfrac{y}{x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \xi y^2 \\ \eta = \dfrac{y}{\xi^2 y^4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \xi y^2 \\ y^3 = \dfrac{1}{\xi^2 \eta} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \xi \dfrac{1}{\xi^{\frac{4}{3}} \eta^{2/3}} = \dfrac{1}{\xi^{\frac{1}{3}} \eta^{2/3}} \\ y = \dfrac{1}{\xi^{\frac{2}{3}} \eta^{1/3}} \end{cases}$$

$$\phi(\xi,\eta) = \left(\frac{1}{\xi^{1/3}\eta^{2/3}}, \frac{1}{\xi^{\frac{2}{3}}\eta^{1/3}} \right) = \left(\xi^{-1/3}\eta^{-2/3}, \ \xi^{-2/3}\eta^{-1/3} \right)$$

Applico il cambio di variabili con questo ϕ

$\Omega_1 = \{x>0, y>0\} \qquad \Omega = \{\xi > 0 \ \eta > 0\} \qquad f = \mathbb{1}_E$

DUNQUE

$$\underbrace{\iint \mathbb{1}_E(\phi(\xi,\eta)) \, |\det J_\phi(\xi,\eta)| \, d\xi \, d\eta}_{\otimes} = \iint_E 1 \, dxdy = |E|$$

Calcolo $J_\phi(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\xi^{-4/3}\eta^{-2/3} & -\frac{2}{3}\xi^{-1/3}\eta^{-5/3} \\ -\frac{2}{3}\xi^{-5/3}\eta^{-1/3} & -\frac{1}{3}\xi^{-2/3}\eta^{-4/3} \end{bmatrix}$

$$\det J_\phi = \frac{1}{9}\xi^{-\frac{6}{3}}\eta^{-\frac{6}{3}} - \frac{4}{9}\xi^{-\frac{6}{3}}\eta^{-\frac{6}{3}} = -\frac{1}{3}\frac{1}{\xi^2\eta^2}$$

$$\mathbb{1}_E \circ \phi = \mathbb{1}_E \circ \psi^{-1}(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{se } \psi^{-1}(\xi,\eta) \in E \iff (\eta, y) \in \psi(E) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$: \quad \psi(E) = [1,2] \times [1,2] = Q$$

$$\circledast = \iint_Q \frac{1}{3} \frac{d\xi}{\xi^2} \frac{d\eta}{\eta^2} = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{d\xi}{\xi^2} \int_1^2 \frac{d\eta}{\eta^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$$\int_1^2 \frac{d\xi}{\xi^2} = \left[-\frac{1}{\xi}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

COORD. POLARI

$\rho \geq 0 \quad 0 \leq \theta \overset{\leq}{<} 2\pi$

$x = \rho\cos\theta \quad y = \rho\sin\theta$ $\quad \phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

NON SONO ESATTAMENTE NEL IPOTESI DEL CAMBIO DI VAR

ϕ NON E' INIETTIVA PERÒ POSSO CAVARMELO NOTANDO CHE

ϕ è iniettivo ed è un diff. se le restringo a $\rho > 0$ $0 < \theta < 2\pi$ e che quello che manca ($\rho = 0$ e $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$) è trascurabile in $\mathbb{R}^2$ FIDIAMOCI !!

Calcoliamo $J_\phi(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}$

$$\det J_\phi = \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho$$

DUNQUE HO:

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_B f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

dove $\phi(B) = A$

se A è mis. e f è ≥ 0 misurabile / f è integrabile

PROVIAMO A RICALCOLARE $\iint_B \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha} =$

$B \to \{0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1\} = D$

$$\iint_D \frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{(\rho^2)^\alpha} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}} = 2\pi \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}$$

$$= 2\pi \left[\frac{\rho^{-2\alpha+2}}{-2\alpha+2}\right]_0^1$$ FINITO se $-2\alpha+2>0 \iff \alpha<1$

$$= \frac{\pi}{1-\alpha}$$

$\boxed{\text{BUONE FESTE !!}}$

ES. $\iint_B \overbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}^{f(x,y)}\,dx\,dy$ N.B. l'integrando non è ≥ 0 !!

Per usare i teoremi devo prima vedere se f è integrabile

Per questo devo fare $\iint_B \underbrace{\frac{|x|}{x^2+y^2}}_{\geq 0}\,dx\,dy$ ← qui posso usare le coordinate polari

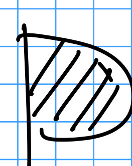
$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{\rho\,|\cos\theta|\,\rho\,d\rho}{\rho^2}\right)d\theta = \int_0^{2\pi}|\cos\theta|\,d\theta \int_0^1 d\rho < +\infty$$

DUNQUE (SOLO ORA) POSSO USARE LE COORD. POL.

Senza $|\cdot|$ ⇝ TROVO ZERO (f è dispari e B simm.)

Se invece $\iint_{B^+} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ $\quad B^+ = \{x^2+y^2\le 1,\ x\geq 0\}$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta \int_0^1 d\rho = [\sin\theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 2$$



B^+