Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 34 14/12/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$\boxed{\text{VISTO IERI}}$: Se $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $E \in \mathcal{M}$ $m(E) = 0$ (E trascurabile) e f è continua in $\mathbb{R}^N \setminus E$ $\Rightarrow$ f è misurabile.

(f continua quasi ovunque $\Rightarrow$ f misurabile)

Se voglio considerare $f: A \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}^N$ allora guardo la funzione $\tilde{f}: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}$ def. da $\tilde{f}(x) = f(x)$ se $x \in A$, $\tilde{f}(x) = 0$ se $x \notin A$.

PROPR. CONT.

16 Se D è un dominio regolare $\Rightarrow$ D è misurabile (ovvio perché D è chiuso) e $m^*(\partial D) = 0$ (dunque ∂D è mis. e ∂D è trascurabile)

CONSEGUENZA Se D dom. reg. e $f: D \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ $\tilde{f} \cdot \begin{cases} f & \text{su } D \\ 0 & \text{fuori} \end{cases}$ è misurabile

INFATTI $\rightarrow$ $\tilde{f}$ è continua su $\mathbb{R}^N \setminus \partial D$, $|\partial D| = 0$

. Se D è limitato $\Rightarrow$ f è integrabile su D (questo secondo proprietà segue da Weierstrass in quanto ottengo

$|f(x)| \leq \text{cost}$ $\forall x \in D$ $\Rightarrow$ $\int_D |f(x)|\, dx \leq \int_D \text{cost}\, dx = |D| \cdot \text{cost} < +\infty$

TEOREMI SUGLI "INTEGRALI ITERATI"

c'è una coppia di teoremi, uno sotto le funzioni misurabili ≥ 0, uno sotto le funzioni integrabili.

TEOREMA DI TONELLI (FUBINI)

Considero $f : \mathbb{R}^{N+M} \to \overline{\mathbb{R}}$, f misurabile in $\mathbb{R}^{N+M}$. NOTAZIONE: se $P \in \mathbb{R}^{N+M}$ scrivo $P = (x, y)$ con $x \in \mathbb{R}^N$ $y \in \mathbb{R}^M$ e scrivo $f(P) = f(x,y)$

IPOTESI $f \geq 0$ (f integrabile su $\mathbb{R}^{N+M}$)

Allora

(1) per quasi ogni x in $\mathbb{R}^N$ la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è misurabile in $\mathbb{R}^M$ (è integrabile in $\mathbb{R}^M$)

DUNQUE per quasi ogni x esiste $\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy$

(≥ 0 se $f \geq 0$ / integrale finito se f è integrabile)

(2) Estendiamo come ci pare la funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy$ nell'insieme trascurabile dei punti x in cui l'integrale non ha senso

Tale funzione è misurabile (è integrabile) su $\mathbb{R}^N$

(3) $$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy \right) dx = \iint_{\mathbb{R}^{N+M}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^{N+M}} f(P)\,dP$$

(nel caso $f \geq 0$ possono essere $+\infty$ / nell'altro caso ho un'uguaglianza tra numeri reali)

ESEMPIO $f(x,y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua (dunque misurabile), $f \geq 0$

NON so se f è integrabile, ma dato che è ≥ 0, posso usare Tonelli

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+x^2+y^2}\right)dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+\frac{y^2}{1+x^2}}\right)dx$$

L'integrale interno lo vedo come Riemann improprio

Per farlo faccio un cambio di variabile $\underbrace{\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}} = t$ (è in 1 variabile)

$y = t\sqrt{1+x^2}$ $\quad dy = \sqrt{1+x^2}\,dt \quad \Rightarrow$

$$\text{INTEGR.} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Big[\arctan(t)\Big]_{-\infty}^{+\infty}dx$$

$$= \pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \pi\,\operatorname{arcsinh}(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = +\infty$$

DUNQUE $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}\frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} = +\infty$ (f non è integrabile)

ALTRO ESEMPIO $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{dx\,dy}{1+(x^2+y^2)^2} =$ (ragiono come sopra)

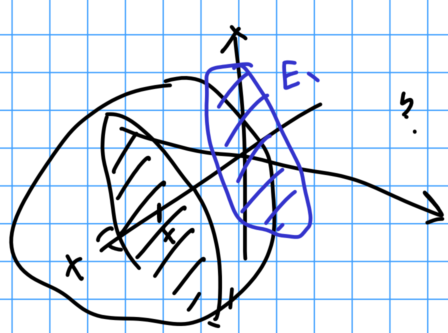
$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\right)dy\right)dx =$$ ... COMPLICATO

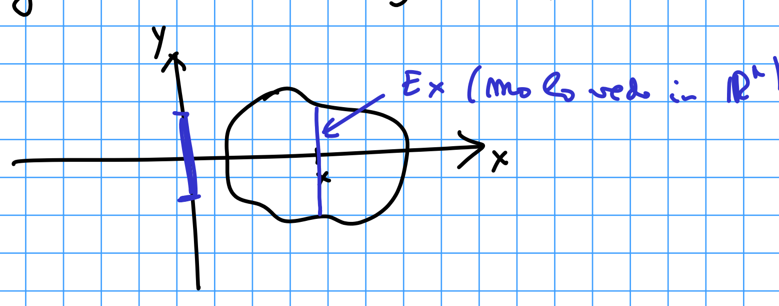
VEDREMO ALTRI ESEMPI DOPO

VARIANTI ~ CONSEGUENZE DI FUBINI-TONELLI

Calcolo della misura di un insieme $E \subset \mathbb{R}^{N+M}$

Sia $E \subset \mathbb{R}^{N+M}$ misurabile. Se $x \in \mathbb{R}^N$ definisco "la sezione" $E_x := \{ y \in \mathbb{R}^M : (x,y) \in E \}$





ALLORA

(1) Per quasi ogni x E_x è misurabile in $\mathbb{R}^M$

(2) la funzione $x \mapsto |E_x|$ (definita come mi pare per le x in cui E_x non è mis.) è misurabile.

(3) $$\int_{\mathbb{R}^N} |E_x|_{\mathbb{R}^M}\, dx = |E|_{\mathbb{R}^{N+M}}$$

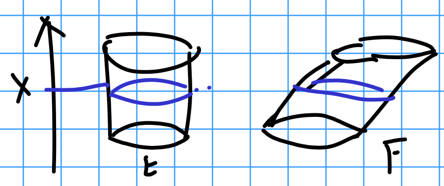
Segue da Tonelli applicato a $f(x,y) := \mathbb{1}_E(x,y)$

NOTA CHE $$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^M} \mathbb{1}_E(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^M} \mathbb{1}_{E_x}(y) \right) dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}} m_M(E_x)\, dx$$

CONSEGUENZA Se E, F insiemi misurabili di $\mathbb{R}^{N+M}$ sono tali che $|E_x| = |F_x|$ per (quasi ogni) x di $\mathbb{R}^N$

$\Rightarrow$ $|E| = |F|$ PRINCIPIO DI CAVALIERI



ESEMPIO (VOLUME DEL DISCO PIENO) $B = \{x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$ (B_R)

USO IL TEOREMA SOPRA VEDENDO $\mathbb{R}^3 = \underset{x}{\mathbb{R}} \times \underset{y=(y,z)}{\mathbb{R}^2}$

DUNQUE $$|B| = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(|B_x|\, dy\,dz \right) dx$$

Noto che $B_x = \{(y,z) : (x,y,z) \in B\} = \{(y,z) : x^2+y^2+z^2 = R^2\}$

$$= \begin{cases} \{(y,z) : y^2+z^2 = R^2 - x^2\} & \text{se } R^2 \ge x^2 \\ \emptyset & \text{se } R^2 < x^2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{DISCO DI CENTRO 0 e raggio } \sqrt{R^2-x^2} & \text{se } |x| \le R \\ \emptyset & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad |B| = \int_{-R}^{R} |B_x| \, dx = \int_{-R}^{R} \pi \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \int_{-R}^{R} \pi \left(R^2 - x^2\right) =$$

$$\pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R} = 2\pi \left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3$$