Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 33 13/12/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Per superare il "problema dei passaggi al limite" si fa un'altra definizione (più generale).

Def. P è un "plurirettangolo numerabile" se

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \qquad \text{dove } R_1 \dots R_n \dots$$

sono una successione di rettangoli (L'ALTRA VOLTA AVEVO UN'UNIONE DI UN INSIEME FINITO di rettangoli)

Fatto Se P è come sopra trovo una succ. $(R'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di rettangoli DISGIUNTI con $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} R'_n$ (NO DIM.)

Def. Se P è come sopra definisco la misura $m(P)$ o $|P|$ ponendo $m(P) := \sum_{n=1}^{\infty} |R_n|$ (ha senso perché ogni serie di numeri positivi ammette la somma – $m(P) \in [0, +\infty]$)
dove R_n rettangoli disgiunti con $P = \cup R_n$

Inoltre la def. sta in piedi perché si può dimostrare che non dipende dalla decomposizione: se $P = \cup R'_n = \cup R''_n$ con R'_n, R''_n rettangoli disgiunti $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |R'_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |R''_n|$

Proprietà Se P_1, P_2 sono plurirettangoli num. $\Rightarrow$

$P_1 \cup P_2$, $P_1 \cap P_2$ $P_1 \setminus P_2$ sono plur. rett num. ANZI

Se (P_n) è una succ. di plurirett. num $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ è ancora un Pl. num. Se $P_n \cap P_m = \emptyset$ $n \neq m$ allora

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(P_n)$$

VEDIAMO COME SI DEFINISCE LA MISURA DI UN INSIEME GENERICO $E \subset \mathbb{R}^N$ (NON CHIEDO E limitato!)

Def. $E \subset \mathbb{R}^N$. Definisco la misura esterna $m^*(E)$ ponendo

$$m^*(E) = \inf \{ m(P) : P \text{ è un plurirett. num. con } E \subset P \}$$

Si vede che $m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(R_n) \text{ dove } R_n \text{ rettangoli}, \ P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \right\}$

SI DIMOSTRANO VARIE PROPRIETA':

(1) Se $E = P$ è un plurirettangolo $\Rightarrow m^*(P) = m(P)$

(2) (SUBADDITIVITÀ NUMERABILE)

Se E_n $n \in \mathbb{N}$ è una successione di insiemi e se

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

(da qui segue che se $m^*(E_n) = 0 \ \forall n \Rightarrow m(E) = 0$)

IN PARTICOLARE $m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$

SI PUÒ MOSTRARE CON UN CONTROESEMPIO (DIFFICILE) che non è sempre vero $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$ neanche quando $A \cap B = \emptyset$

BISOGNA INDIVIDUARE "GLI INSIEMI MISURABILI"

DEF. DICO che $A \subset \mathbb{R}^N$ è misurabile (scrivo $A \in \mathcal{M}$ gli insiemi misurabili) se $\forall E \subset \mathbb{R}^N$ vale la formula

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$$

(A "spezza bene" tutti gli insiemi E)

Se $E \in \mathcal{M}$ allora $m(E) = m^*(E)$. Chiamo $m(E)$ (o anche $|E|$)

la MISURA di E

CONTINUO con le proprietà:

(3) Se (A_n) misurabili $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ sono misurabili

Se A e B misurabile $\Rightarrow A \setminus B$ è misurabile

($\mathcal{M}$ è stabile per unioni intersezioni numerabili e per passaggio al complementare) FALSA nel caso di Riemann

(4) Se $A_n \in \mathcal{M}$ sono disgiunti $A_n \cap A_m = \emptyset$ per $n \neq m$ allora

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \qquad (\text{il risultato può essere } +\infty)$$

(m è numerabilmente additiva)

(5) Se $A_n \in \mathcal{M}$ $\forall n$ e se $A_n \subset A_{n+1}$ (SUCCESSIONE CRESCENTE DI INSIEMI MISURABILI)

$$\Rightarrow \quad m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{m(A_n)}_{\text{succ. crescente di numeri } \geq 0}$$

(2.5) Se $A \subset B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$ $\forall A, B$ in $\mathbb{R}^N$

(6) Se $A_n \in \mathcal{M}$, $\forall n$ e se $A_{n+1} \subset A_n$ (succ. decrescente di insiemi misurabili)

e $m(A_1) < +\infty$ $\Rightarrow$ $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{m(A_n)}_{\text{succ. decrescente di numeri } \geq 0,\ < +\infty}$

(7) Se A è aperto $\Rightarrow$ A è misurabile

Da questo segue la misurabilità di qualunque insieme che si possa ottenere come UNIONE / INTERSEZIONE / COMPLEMENTARE DI APERTI (per esempio A chiuso $\Rightarrow$ A misurabile)

(SECONDO LEBESGUE!)

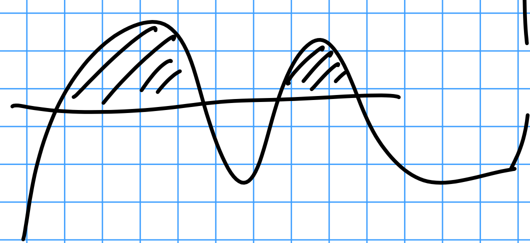
INTEGRALI

SUPPONIAMO CHE $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

(se $x, y \in [-\infty, +\infty]$ possiamo dire $x \leq y$ / $x \geq y$ . .)

Chiamo "SOTTOGRAFICO" di f l'insieme

$$SGR(f) \quad \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{N+1} : \ x \in \mathbb{R}^N \quad 0 \leq f(x) \leq y \}$$



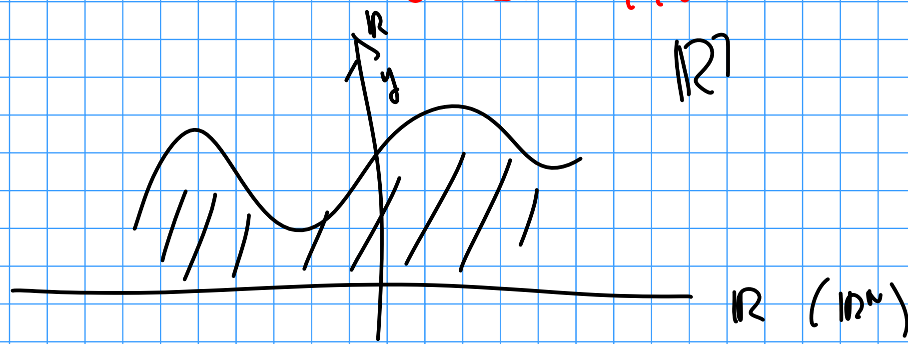
Def. f si dice MISURABILE se $\underbrace{SGR(f^+) \text{ e } SGR(f^-)}$ sono misurabili in $\mathbb{R}^{N+1}$

Def. Se f è MISURABILE, $f \geq 0$ definisco l'integrale di f:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx} := m_{\mathbb{R}^{N+1}} (SGR(f)) \quad \text{(può essere } +\infty \text{)}$$

DUNQUE OGNI FUNZIONE f MISURABILE con $f \geq 0$ AMMETTE INTEGRALE (eventualmente $+\infty$)

$N = 1$



Def. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. DICO che f è INTEGRABILE se f è MISURABILE e se

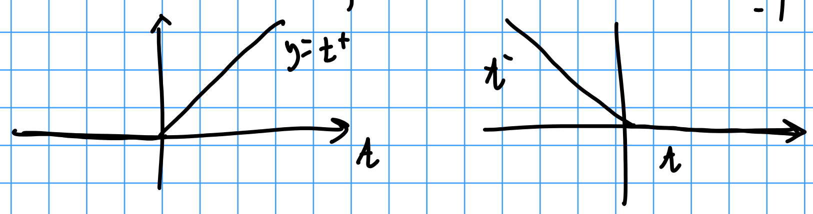
$$\int_{\mathbb{R}^N} f^+(x)\,dx < +\infty \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)\,dx < +\infty$$

[RICORDO che, se $t \in \mathbb{R}$ chiamo $t^+ = \max(t,0)$ e $t^- = (-t)^+$

$(-1)^+ = 0$ $\quad (1)^+ = 1$ $\quad (-1)^- = 1$ $\quad (-1)^+ = 0$

oppure $t^+ = \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$, $\quad t^- = \begin{cases} -t & \text{se } t \leq 0 \\ 0 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow t = t^+ - t^-$, $|t| = t^+ + t^-$, $t^+ \geq 0$ $t^- \geq 0$



]

Se f è integrabile definisco l'integrale di f ponendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f^+(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)\,dx \quad (\in \mathbb{R}\,!!)$$

(SI DIMOSTRA CHE f misurabile $\Rightarrow$ f^+ e f^- misurabili $\leftarrow$ SEGUE IMMEDIATAMENTE DALLA DEF.)

- Le funzioni integrabili hanno integrale finito

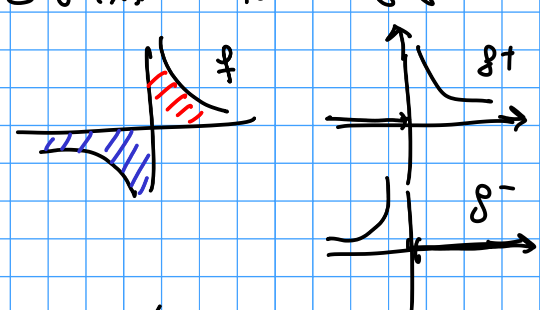
Se $f \geq 0$ misurabile $\Rightarrow$ f ammette integrale MA NON NECESSARIO CHE SIA INTEGRABILE

Per esempio se definisco $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f(0) = 0$

si vede che f è misurabile (DOPO ..)

MA NON È INTEGRABILE. $\int f^+(x)\,dx = +\infty$ $\quad \int f^-(x)\,dx$

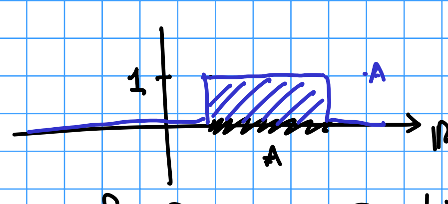
(vediamo dopo come mai)



ESEMPIO/DEFINIZIONE Se $A \in \mathcal{M}$ ($A \subset \mathbb{R}^N$ misurabile)

Chiamo funzione caratteristica di A la funzione $\mathbb{1}_A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ def. da

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$



SI VEDE CHE $\mathbb{1}_A$ è una funzione misurabile e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_A(x)dx = m(A)$$

Def. (continuazione) Se $A \subset \mathbb{R}^N$ e $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$, considero la funzione $\tilde{f}: \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

- Dico che f è misurabile su A se $\tilde{f}$ è misurabile
- Se $f \geq 0$ è misurabile su A definisco l'integrale di f su A

$$\int_A f(x)dx := \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(x)dx \quad (\text{può essere } +\infty)$$

- Dico che f è integrabile su A se f è misurabile su A e se

$$\int_A f^+(x)\,dx < +\infty \quad e \quad \int_A f^-(x)dx < +\infty$$

IN TAL CASO DEFINISCO $\int_A f(x)dx := \int_A f(x)^+ dx - \int_A f^-(x)dx$

CONTINUO CON LE PROPRIETÀ

(8) Se f è misurabile e A è misurabile $\Rightarrow$ f è misurabile su A) lo caso che serve!!

(9) Se f è misurabile $\Rightarrow |f|$ è misurabile (quasi ovvio dato che $|f| = f^+ + f^-$ (vedo la linearità dopo.)

(10) (LINEARITÀ) Se f, g sono misurabili e se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora $\lambda f + \mu g$ è misurabile – PUR DI CONVENIRE CHE $0 \cdot \infty = 0$ (se $\lambda = 0$ $\lambda f = 0$, se $\mu = 0$ $\mu g = 0$) – e PUR DI SUPPORRE che NON CI SIANO MAI $+\infty - \infty$

(DUNQUE $\lambda f + \mu g$ è misurabile quando ha senso!)

Se f e g sono integrabili $\Rightarrow$ $\lambda f + \mu g$ è integrabile

(VEDI NOTA SOTTO ✩) e $\int \lambda f + \mu g = \lambda \int f + \mu \int g$

(INSIEMI DI MISURA NULLA)

(11) Dico che E è trascurabile se $m^*(E) = 0$.

Se E è trascurabile $\Rightarrow$ E è misurabile (e $m(E) = 0$)

Def. Dico che una proprietà è verificata quasi ovunque / per quasi ogni x se $\{x$ per cui la proprietà è falsa$\}$ è un insieme trascurabile

Per esempio se $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in \mathbb{Q} \ (x \text{ razionale}) \\ 0 & \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ (x \text{ irrazionale}) \end{cases}$

allora f è quasi ovunque nulla perché $\{x : f(x) \neq 0\} = \mathbb{Q}$

e si vede $\boxed{m(\mathbb{Q}) = 0}$. IN EFFETTI $\mathbb{Q}$ è un insieme di misura nulla perché si dimostra che $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}$

(I RAZIONALI SI POSSONO ENUMERARE ..)

(12) Se f è integrabile $\Rightarrow$ $\{x \in \mathbb{R}^N : |f(x)| = +\infty\} = \{x : f(x) = \pm\infty\}$ ha misura nulla

SE f è integrabile $\Rightarrow$ f è finita quasi ovunque.

(13) Se f è misurabile e $g = f$ quasi ovunque (cioè $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ è trascurabile) $\Rightarrow$ g è misurabile

Inoltre se $f \geq 0$, $g \geq 0$ $\Rightarrow$ $\int f = \int g$

Se f è integrabile e $g = f$ quasi ovunque $\Rightarrow$ g è integrabile

e $\int f = \int g$

✩ NOTA Se f e g sono integrabili, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\lambda f + \mu g$ ha senso ed è finito quasi ovunque DUNQUE

ha senso dire che f, g integrabili, $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow h := \lambda f + \mu g$ è integr.
(effettivamente ci possono essere delle x in cui risulta $h(x) = +\infty - \infty$ – ma tali x sono poche! – Se per per esempio metto $h(x) = 0$ in questi punti la h è ben definita e $\int h = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx$

(14) Se $f \geq g \geq 0$, f, g misurabili $\Rightarrow \int f \geq \int g$

Se $f \geq g$ f, g integrabili $\Rightarrow \int f \geq \int g$

DIFFERENTE DA Riemann.

OSS. Sia f misurabile. Allora $\boxed{f \text{ è integrabile} \Leftrightarrow |f| \text{ integrabile}}$

Allora se f, g sono misurabili, se $\boxed{|f| \leq g}$
e se $\boxed{\int g < +\infty} \Rightarrow f$ integrabile

CRITERIO USATO SPESSO

(15) (Confronto con Riemann) Caso $N=1$

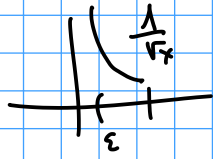
- Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. ALLORA

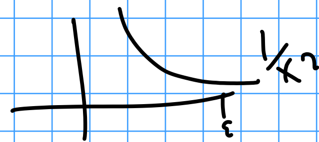
f INTEGRABILE SECONDO Riemann $\Rightarrow f$ integrabile secondo Lebesgue e gli integrali sono gli stessi

(VICEVERSA NO, vedi la funzione di Dirichlet $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ che è integrabile per Lebesgue e ha integrale nullo)

- Se $E \subset \mathbb{R}^N$ è misurabile secondo Riemann $\Rightarrow E \in \mathcal{M}$ e le misure coincidono.

- TORNIAMO A $N=1$. Supponiamo che f sia integrabile in senso improprio secondo Riemann

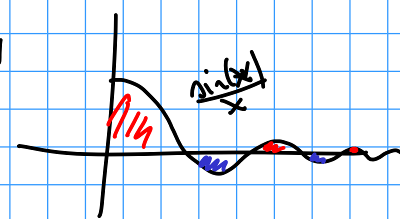




(a) <u>SE</u> f è ASSOLUTAMENTE INT. (IN S. IMPROPRIO secondo R.)
$\Rightarrow$ f è integrabile e gli integrali coincidono

(b) <u>SE</u> f è R-integrabile in senso improprio, ma non assolutamente $\Rightarrow$ f <u>NON</u> è integrabile secondo $\mathcal{L}$.

<u>Per esempio</u> $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ | $f(0)=1$



NON È INTEGRABILE SECONDO Lebesgue

<u>FATTO</u> Se f è continua tranne che su un insieme trascurabile $\Rightarrow$ f è misurabile.