Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 32 12/12/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Dom. reg. a tratti in Ω, Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ è un insieme

$D \subset \Omega$ tale che $\exists\ g_1 \dots g_k : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1

tale che $D = \{ x \in \Omega : g_1(x) \leq 0, \dots, g_k(x) \leq 0 \}$

e vale l'ipotesi (di trasversalità / non tangenza)

$$(T.) \begin{cases} \cdot \text{ se } i_1 \dots i_r \text{ sono } r \text{ indici tra } 1 \text{ e } k \text{ e se} \\ g_{i_1}(x) = \dots = g_{i_r}(x) = 0 \quad \text{allora} \\ \nabla g_{i_1}(x) \dots \nabla g_{i_r}(x) \text{ sono lin. indip.} \end{cases}$$

Se $\overline{D} \subset \Omega$ dico che D è un dom. reg. a tratti (per es. se $\Omega = \mathbb{R}^N$)

In questo ultimo caso:

- D è chiuso
- $\overset{\circ}{D} = \{ g_1(x) < 0 \dots g_k(x) < 0 \}$
- $\partial D = \bigcup_{i=1}^{k} \{ g_i(x) = 0,\ g_j(x) \leq 0 \text{ se } j \neq i \} = \partial \overset{\circ}{D}$

Conviene definire la "FRONTIERA REGOLARE":

$$\partial_{reg} D = \bigcup_{i=1}^{K} \{ g_i(x) = 0 \, , \; g_j(x) < 0 \text{ se } i \neq j \} \quad (\subset \partial D)$$

Se $x_0 \in \partial_{reg}$ è ben definito il "versore normale uscente da D" e ∂D in x_0

$$\hat{\nu}(x_0) := \frac{\nabla g_i(x_0)}{\| \nabla g_i(x_0) \|}$$

dove i è l'unico indice per cui $g_i(x) = 0$

<u>Osservo che</u> se faccio $g(\overbrace{x_0 + t\,\hat{\nu}(x_0)}) =: \varphi(t)$

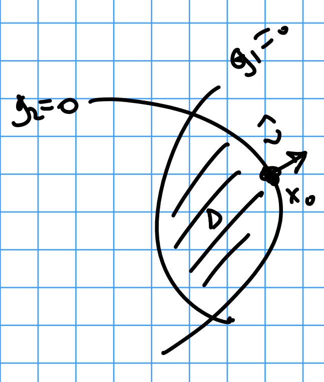
$$\varphi(0) = g(x_0) = 0 \, , \quad \varphi'(t) = \nabla g(x_0 + t\,\hat{\nu}(x_0)) \cdot \hat{\nu}(x_0)$$

$$\varphi'(0) = \nabla g(x_0) \cdot \frac{\nabla g(x_0)}{\| \nabla g(x_0) \|} = \| \nabla g(x_0) \| > 0$$

$$\Rightarrow \quad g(x_0 + t\,\hat{\nu}(x_0)) > 0 \quad \forall \, t > 0 \quad (t \text{ piccolo})$$

IN ALTRI TERMINI $\underbrace{x_0 + t\,\hat{\nu}(x_0)}_{\text{ESCE DA D !!}} \notin D$ per $t > 0$ piccolo

($\hat{\nu}(x_0)$ è "uscente")



<u>DEF.</u> (Vincolo misto ...in Ω) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto

$g_1 \dots g_K \, , \; h_1 \dots h_H$ di classe $C^1(\Omega)$ e pongo

$$\mathcal{M} = \{ x \in \Omega : g_1(x) = \dots g_K(x) = 0 \, , \; h_1(x) \leq 0 \dots h_H(x) \leq 0 \}$$

(T_0) Se $i_1 \dots i_r$ sono r indici tra 1 e H e se

$$0 = g_1(x) = \dots g_K(x) = h_{i_1}(x) = \dots = h_{i_r}(x)$$

allora $\nabla g_1(x), \dots \nabla g_K(x), \nabla h_{i_1}(x), \dots, \nabla h_{i_r}(x)$
sono lin indip

Per esempio $\qquad M = \{ x^2+y^2+z^2 = 1 , \; z \geq 0 \}$

<u>TEOREMA</u> $\quad \Omega$ aperto di $\mathbb{R}^N$ $\quad g_1 \dots g_K, h_1 \dots h_H$ come sopra

$$M = \{ x : g_1(x) = \dots = g_K(x) = 0, \; h_1(x) \leq 0 \dots h_H(x) \leq 0 \}$$

(vale N.T.) $\quad$ Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione C^1 e che x_0 pto di max/min rel. per f su M. Allora

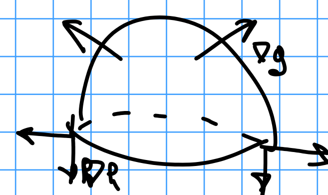
$\exists \; \lambda_1 \dots \lambda_K, \mu_1 \dots \mu_H \in \mathbb{R}$ tali che

$$\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \nabla g_i(x_0) + \sum_{j=1}^{H} \mu_j \nabla h_j(x_0)$$

e $\mu_j = 0$ se $h_j(x_0) < 0$ $\quad$ (μ_j c'è soltanto se $h_j(x_0) = 0$)

<u>ESEMPIO</u> $\qquad M = \{ x^2+y^2+z^2 = 1 , \; z \geq 0 \}$

$f(x,y,z) = x + y + z$



(si verifica che vale N.T. : se $P = (x,y,z)$ sta in M e $z > 0$

$$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 \qquad h(x,y,z) = -z$$

<u>Vale NT</u>: $\cdot$ Se $\underset{(x,y,z)}{P} \in M$ e $h(P) < 0$ $\quad (z > 0)$ allora $\nabla g(P) \neq 0$

$\cdot$ Se $P \in M$ e $h(P) = 0$ $\quad (z = 0)$ allora $\nabla g(P)$ e $\nabla h(P)$ sono lin indip

Si vede ...

Troviamo i pti di max/min di f su $\mathcal{M}$

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \qquad \nabla h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

IL TEOREMA CI PORTA A STUDIARE DUE CASI

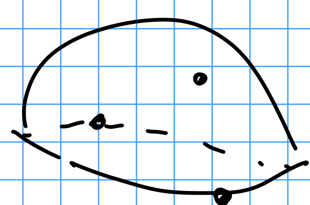
(1)
$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 1, \underbrace{z>0}_{h(P)<0} \end{cases} \Rightarrow \quad x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}} \,/\, \cancel{-\frac{1}{\sqrt{3}}}_{z>0}$$

NON C'È $\mu \nabla h(P)$

(UN PTO CRITICO - su $\mathcal{M}$)

(2)
$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + \mu\cdot 0 \\ 1 = 2\lambda y + \mu \cdot 0 \\ 1 = 2\cancel{\lambda z} - \mu \\ x^2+y^2 = 1, \ z=0 \end{cases} \iff \quad x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad z=0$$

(ALTRI DUE PTI CRITICI



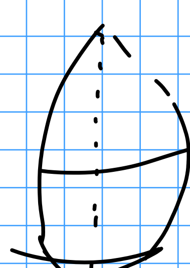
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \max_{\mathcal{M}} f = \sqrt{3} \qquad \min_{\mathcal{M}} f = -\sqrt{2}$$

ESEMPIO $\quad D = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$

(DOMINIO REGOLARE)



$$f(x,y,z) = ax + by + cz \qquad \text{con} \quad (a,b,c) \neq (0,0,0)$$

VOGLIO I MAX/MIN DI f su D.

IN QUESTO CASO $D = \{g_1 \le 0, \ g_2 \le 0 \ \ g_3 \le 0\}$ dove

$$g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1, \quad g_2 = -x, \quad g_3 = -y$$

e $\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla f = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

VARI CASI

(1) $\to$ NESSUNA EGUAGLIANZA

1) $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ x^2+y^2+z^2<1, x>0, y>0 \end{cases}$ IMPOSSIBILE $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \ne \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

NON CI SONO PTI CRITICI INTERNI AD D

2 $\to$ UNA EGUAGLIANZA

2A) $\begin{cases} a = 2\lambda x \\ b = 2\lambda y \\ c = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=1, \ x>0, y>0 \end{cases}$ $\quad \begin{aligned} a^2 &= 4\lambda^2 x^2 \\ b^2 &= 4\lambda^2 y^2 \\ c^2 &= 4\lambda^2 z^2 \end{aligned}$ SOMMO $\quad a^2+b^2+c^2 = 4\lambda^2 \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{1}$

$2\lambda = \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$\begin{cases} a = \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}\, x \\ b = \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}\, y \\ c = \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}\, z \\ x^2+y^2+z^2 = 1, \ x>0, y>0 \end{cases}$

$(x,y,z) = \pm \dfrac{1}{\underbrace{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}_{\ne 0}} (a,b,c)$

POSSIBILE SE a e b SONO CONCORDI, $ab>0$

$+$ se $a,b>0$
$-$ se $a\,b<0$
(se $ab\le 0$ NON TROVO SOL.)

IN QUESTI DUE PUNTI f vale $\boxed{\begin{aligned} &\pm\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{aligned}}$

$+$ se $a>0$ $b>0$
$-$ se $a<0$ $c<0$

2B) $\begin{cases} a = \lambda(-1) \\ b = 0 \\ c = 0 \\ \cancel{x^2}+y^2+z^2<1, \ x=0, y>0 \end{cases}$

POSSIBILE SOLO SE $b=c=0$. SE CIÒ AVVIENE TROVO $\lambda=-a$

e tutti i punti $P=(0,y,z)$ con $0<y\le 1$ e $z \in [-1,1]$ e $y^2+z^2<1$

Su questi punti f vale $\boxed{a\,x = 0}$

(2C) $\begin{cases} a = 0 \\ b = -\lambda \\ c = 0 \\ x^2+y^2+z^2<1, \ x>0, y=0 \end{cases}$

Possibile solo se $a=c=0$. IN TAL CASO tutti i pti $(x,0,z)$ con $x>0$ $x^2+z^2<1$ VANNO BENE $\boxed{\text{e } f \text{ vale } by=0}$

3 → DUE EGUAGLIANZE (2 MOLTIPLICATORI)

$$(3A)\quad \begin{cases} a = \cancel{2\lambda x} - \mu \\ b = 2\lambda y \\ c = 2\lambda z \\ \cancel{x^2} + y^2 + z^2 = 1, \quad x = 0, \ y > 0 \end{cases} \qquad b^2 + c^2 = 4\lambda^2(y^2+z^2) = 4\lambda \qquad 2\lambda = \pm\sqrt{b^2+c^2}$$

$$\begin{cases} a = -\mu \\ b = \pm\sqrt{b^2+c^2}\, y \\ c = \pm\sqrt{b^2+c^2}\, z \end{cases}$$

← scelgo + o − a seconda del segno di b (in modo che $y>0$) $\boxed{b \neq 0}$

(se $b=0$ NON HO SOL.)

Se $b \neq 0$ TROVO $\pm\left(0, \frac{b}{\sqrt{c^2+b^2}}, \frac{c}{\sqrt{c^2+b^2}}\right)$ + se $b>0$ − se $b<0$

su cui f vale

$$\pm\frac{b^2+c^2}{\sqrt{b^2+c^2}} = \pm\sqrt{b^2+c^2} \qquad \begin{matrix} + \text{ se } b>0 \\ - \text{ se } b<0 \end{matrix}$$

$$(3B)\quad \begin{cases} a = 2\lambda x \\ b = \cancel{2\lambda y} - \mu \\ c = 2\lambda z \\ x^2 + \cancel{y^2} + z^2 = 1, \quad x > 0, \ y = 0 \end{cases}$$

come prima $2\lambda = \pm\sqrt{a^2+c^2}$

$$\leadsto \pm\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}, 0, \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\right) \qquad \begin{matrix} + \text{ se } a>0 \\ - \text{ se } a<0 \end{matrix}$$

su cui f vale $\pm\frac{a^2+c^2}{\sqrt{a^2+c^2}} = \pm\sqrt{a^2+c^2}$

(se $a=0$ NO SOL.)

$$(3C)\quad \begin{cases} a = -\mu \\ b = -\nu \\ c = 0 \\ \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + z^2 < 1 \quad x = 0, \ y = 0 \end{cases}$$

solo se $c = 0$ Tutti i pti del tipo $(0, 0, z)$ con $-1 < z < 1$ vanno bene.

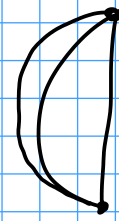
Su questi punti $\boxed{f \text{ vale } ax + by = 0}$

$$(4)\quad \begin{cases} a = \cancel{2\lambda} x - \mu \\ b = \cancel{2\lambda} y - \nu \\ c = 2\lambda z \\ \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + z^2 = 1, \quad x = 0, \ y = 0 \end{cases}$$

sempre verificate (prime due equazioni)

$$\Rightarrow \quad (0, 0, 1) \quad (0, 0, -1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(0,0,1) &= c \\ f(0,0,-1) &= -c \end{aligned}}$$



Per esempio se $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$ TROVO

(2A) NULLA / (2B) NULLA (2C) NULLA

(3A) NULLA / (3B) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ (3C) NULLA

(4) $\pm(0,0,1) \to \pm 1$

$$\boxed{\max = \sqrt{2} \qquad \min = -1}$$

TEORIA DELL'INTEGRAZIONE IN PIÙ VARIABILI

VEDIAMO LE IDEE DELL'INTEGRALE / DELLA MISURA

PROBLEMA MISURARE GLI INSIEMI DI $\mathbb{R}^N$

PUNTO DI PARTENZA: GLI N-RETTANGOLI

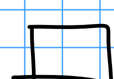
R si dice N-RETTANGOLO se $R = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N$

= Prodotto cartesiano di N INTERVALLI $I_1 \dots I_N$

$$R = \{(x_1 \dots x_N) : x_1 \in I_1, x_2 \in I_2 \dots x_N \in I_N\}$$

I_i sono intervalli (aperti / semiaperti / chiusi / limitati / illimitati)

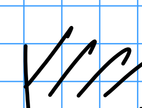
R può essere



$[0,1] \times [0,1]$

$[0,1] \times \{0\}$

TUTTO $\mathbb{R}^2$



$\{x \geq 0, y \geq 0\}$

LA MISURA DI UN RETTANGOLO È DEF. DA

$$m(R)=|R|=|I_1|\cdot|I_2|\cdots|I_N|$$

CONVENZIONE: se uno dei fattori fa zero $|R|=0$ anche se qualche fattore $=+\infty$ (VINCE 0 su ∞ IN QUESTA TEORIA)

e $|I| = \sup(I)-\inf(I)$ se I è un intervallo

$$|[a,b]|=|]a,b[|=b-a \quad \text{se } a\le b \in \mathbb{R}$$

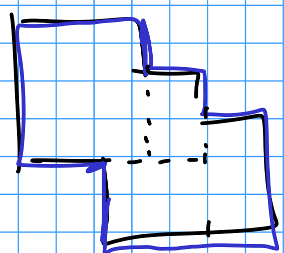
LA RETTA $\{(x,y) : x\in\mathbb{R},\ y=0\}$ HA MISURA ZERO

Se R è limitato $|R|<+\infty$!!

FATTI I RETTANGOLI CONSIDERO I PLURIRETTANGOLI

$P\subset\mathbb{R}^N$ è un PLURIRETTANGOLO se

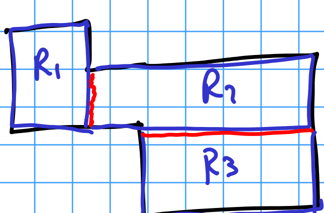
$$P=R_1\cup\dots\cup R_K \quad \text{dove } R_1 .. R_K \text{ sono rettangoli}$$



(P può ammettere più di una decomposizione in rettangoli!)

FATTO Se P è un plurirettangolo posso trovare dei rettangoli $R_1 .. R_H$ DISGIUNTI PER CUI

$$P=R_1\cup .. \cup R_H$$



ALLORA DEFINISCO LA MISURA DI P come

$$|P|=|R_1|+\dots+|R_H|$$

SI DIMOSTRA CHE se $R'_1 \dots R'_K$ È UN'ALTRA DECOMPOSIZIONE DI P in RETTANGOLI DISGIUNTI $\Rightarrow$ LA MISURA È LA STESSA

Ho DEFINITO $|P|$ per ogni plurirettangolo!

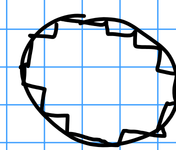
<u>FATTO</u> Se $P_1 \subset P_2$ sono plurirettangoli $\Rightarrow |P_1| \le |P_2|$

PRENDIAMO UN GENERICO $E \subset \mathbb{R}^n$ <u>E LIMITATO</u>
(ESISTE $\bar{R}$ rettangolo con lati limitati per cui $E \subset \bar{R}$)

<u>Def.</u> Chiamo <u>misura interna</u> di E il numero

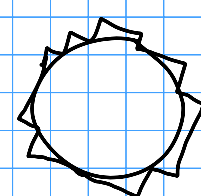
$$m_*(E) = \sup\{ |P| : P \text{ plurirettangolo}, P \subset E \}$$

$$(\Rightarrow m_*(E) \le m(\bar{R}) < +\infty)$$



Analogamente chiamo <u>misura esterna</u> di E il numero

$$m^*(E) = \inf\{ |P| : P \text{ plurirettangolo } E \subset P \}$$



$$(m^*(E) \le m(\bar{R}) < +\infty)$$

$\bar{R}$ è uno degli oggetti di cui si fa l'inf.

PER COME NASCONO QUESTI NUMERI HO:

$$0 \le m_*(E) \le m^*(E) \le |\bar{R}| < +\infty$$

PUÒ succedere che $m_*(E) < m^*(E)$. Per esempio

NUMERI RAZIONALI

$$E = \{ (x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q} \}$$

Si può vedere che se $P \subset E$, P plurirettangolo $\neq 0 \Rightarrow$ P è un punto.

Se $P \supset E \Rightarrow P \subset [0,1]\times[0,1]$

$\rightsquigarrow$ $m_*(E) = 0$, $m^*(E) \ge 1$ (in realtà $= 1$)

DEF. DICO CHE E è misurabile secondo Riemann se $m_*(E) = m^*(E)$ E IN QUESTO CASO LA CHIAMO MISURA DI E e la indico con $m(E)$ o $|E|$

SI DIMOSTRA i plurirettangoli sono misurabili e la loro misura coincide con quella iniziale

Questa nozione di misura va bene in molti contesti MA HA IL DIFETTO DI NON PASSARE AL LIMITE

PUÒ succedere che A_n sia una successione di INSIEMI MISURABILI con $A_n \subset A_{n+1}$, MA che $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ NON SIA MISURABILE