Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 31 07/12/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

sfera in $\mathbb{R}^3$ $\cap$ piano

$\max_M / \min_M$ di $f(x,y,z) = xyz$ $\quad M = \{x^2+y^2+z^2=1, x+y+z\}$

ALTRO MODO

$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ ← ortogonali e stanno in M.

$\gamma(t) = \hat{v}_1\cos(t) + \hat{v}_2\sin(t) \quad 0\le t\le 2\pi$ ← descrive M in forma param.

$(\|\gamma(t)\|^2 = 1 \quad \forall t\in[0, 2\pi])$. Allora prendo

$$\varphi(t) = f(\gamma(t)) = \Big(\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) + \tfrac{1}{\sqrt{6}}\sin(t)}_{\gamma_1(t)}\Big)\Big(-\tfrac{2}{\sqrt{6}}\sin(t)\Big)\Big(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) + \tfrac{1}{\sqrt{6}}\sin(t)\Big) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}}\sin(t)\left(\frac{1}{6}\sin^2(t) - \frac{1}{2}\cos^2(t)\right) = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\sin^2(t) - \frac{1}{2}\right)\sin(t) =$$

$$\boxed{\frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{2}{3}\sin^2(t) - \frac{1}{2}\right)\sin(t) = \varphi(t)}$$

$$\varphi'(t) = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{4}{3}\sin(t)\cos(t)\right)\sin(t) + \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{2}{3}\sin^2(t) - \frac{1}{2}\right)\cos(t) =$$

$$\frac{2}{\sqrt{6}}\cos(t)\left(\frac{4}{3}\sin^2(t) + \frac{2}{3}\sin^2(t) - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{6}}\cos(t)\left(2\sin^2(t) - \frac{1}{2}\right)$$

$\varphi'(t) = 0 \iff \cos(t) = 0$ oppure $\sin(t) = \pm 1/2$

se $\cos(t)=0 \Rightarrow \sin(t)=\pm 1$ e

$$\varphi(t)=\frac{2}{\sqrt6}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)(\pm 1) = \pm\frac{1}{3\sqrt6} \qquad \left(P=\left(\frac{1}{\sqrt6}\ \frac{1}{\sqrt6}\ -\frac{2}{\sqrt6}\right)\right)$$

se $\sin(t)=\pm 1/2 \Rightarrow \varphi(t)=\frac{2}{\sqrt6}\left(\left(\frac{2}{3}\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(\pm\frac{1}{2}\right)\right)=$

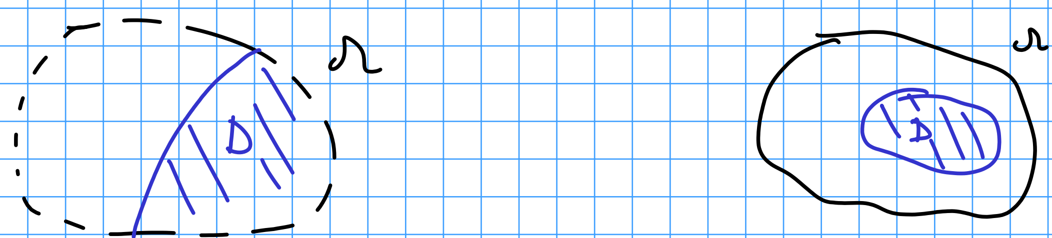
$$\pm\frac{1}{\sqrt6}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)=\pm\frac{1}{3\sqrt6}$$ ← GLI STESSI TROVATI IERI (CONTROLLO ??)

DEF Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e sia $D \subset \Omega$. Dico che D è un "DOMINIO REGOLARE IN Ω" se esiste $g:\Omega\to\mathbb{R}$ tale che

$$D=\{x\in\Omega:\ g(x)\le 0\} \quad \text{E} \quad \nabla g(x)\neq 0\ \forall x \text{ con } g(x)=0$$

SE (COME DI SOLITO SUCCEDE) $\overline{D}\subset\Omega$ / per esempio $\Omega=\mathbb{R}^N$

Allora dico che D È UN "DOMINIO REGOLARE" no Ω

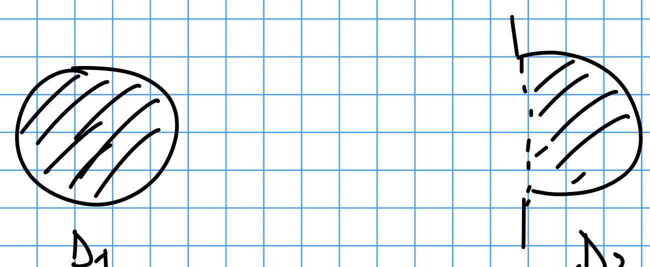


(g la chiamo "FUNZIONE DEFINENTE")

per es.

$D_1=\{x^2+y^2+z^2\le 1\}$ è un dominio regolare $(\Omega=\mathbb{R}^3)$

$D_2=\{x^2+y^2+z^2\le 1,\ x>0\}$ è un dom. reg in $\Omega=\{x>0\}$



PROPRIETÀ (segue da Dini). Se D è un dominio regolare (in Ω) $\Rightarrow$

D è chiuso, $\partial D=\{x:\ g(x)=0\}=\partial\mathring{D}$, $\mathring{D}=\{g(x)<0\}$

$\partial D\cap\Omega$

• Se $P \in \underbrace{\partial D}_{=\{g=0\}}$ $(\partial D \cap \Omega)$ allora sono definiti

① l'iperpiano tangente a ∂D in P definito da

$$T_{\partial D}(P) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^N : \nabla g(P) \cdot \vec{v} = 0\}$$

② la retta normale a ∂D in P definita da

$$N_{\partial D}(P) = \{\lambda \nabla g(P) \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$

(in effetti $\{x \in \Omega : g(x) = 0\}$ è un vincolo regolare di codimensione 1)

QUESTE NOZIONI ($T_{\partial D}(P)$ e $N_{\partial D}(P)$) NON dipendono da g (no DIM.)

DEF. (CONT.) $D \subset \Omega$ è "REGOLARE A TRATTI" se esistono $g_1 \dots g_k : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che

$$D = \{x \in \Omega : g_1(x) \le 0, \dots, g_k(x) \le 0\}$$

PONGO $g = (g_1 \dots g_k)$ da $\Omega \to \mathbb{R}^k$

+ (IPOTESI DI TRASVERSALITÀ) (Trasv.)

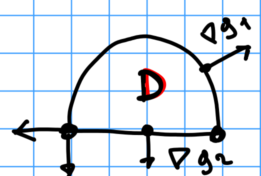
Se $x \in \Omega$ e ci sono $r \le k$ indici $i_1 < \dots < i_r$ tali che $g_{i_1}(x) = \dots = g_{i_r}(x) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}}$ $(k \times r)$ ha rango r $(\le k)$

(oppure $\nabla g_{i_1}(x) \dots \nabla g_{i_r}(x)$ sono lin indip)

SE $\bar{D} \subset \Omega$ dico che D è regolare a tratti (senza parlare di Ω)

ES.



$\leftarrow \{x^2 + y^2 \le 1, \ y \ge 0\}$ $\quad g_1 = x^2 + y^2 - 1 \quad g_2 = -y$

Devo verificare che: se $g_1(P) = 0 \overset{g_2<0}{\Rightarrow} \nabla g_1(P) \ne 0$

(ok: $P \in$ sfera $\nabla P = 2P \ne 0$

se $g_2(P) = 0 \overset{g_1<0}{\Rightarrow} \nabla g(P) \ne 0$

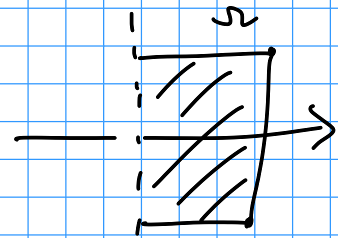
(ok $P = (x, 0)$ $\nabla g(P) = (0, -1) \ne 0$)

Se $g_1(P) = g_2(P) = 0$ $\quad \nabla g_1(P)$ e $\nabla g_2(P)$ lin. indip.

In questo caso $P = (\pm 1, 0)$ e $\nabla g_1 = 2P = \underbrace{\begin{pmatrix}\pm 2\\ 0\end{pmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}}_{\text{lin. ind}}$

DUNQUE HO UN DOM. REG. A TRATTI $(\Omega = \mathbb{R}^2)$

DOM REG. A TRATTI IN $\Omega = \{x > 0\}$



$D = \{0 < x \le 1,\ |y| \le 1\}$

<u>FATTO</u> Se D è regolare a tratti (in Ω) Allora

$$\partial D = \{x : g_1(x) = 0,\ g_j(x) \le 0\ \ j \ne 1\} \cup \dots \cup \{x : g_k(x) = 0,\ g_j(x) \le 0\ \ j \ne k\}$$

$(\partial D \cap \Omega)$ $(x \in \Omega)$

$$= \bigcup_{i=1}^{k} \{x : g_i(x) = 0\ ,\ g_j(x) \le 0 \text{ se } j \ne i\}$$

CONTINUA...