Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 30 06/12/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE – ESEMPI

$f(x,y,z) = ax + by + cz$ $\quad$ ($a,b,c \in \mathbb{R}$ $\quad (a,b,c) \neq (0,0,0)$)

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \Rightarrow S := \{ g(x,y,z) = 0 \} = \{ x^2+y^2+z^2 = 1 \}$

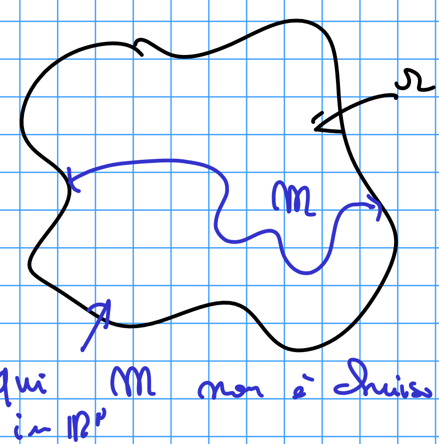
(quello che ieri era M)

Cerco $\max_S f$ / $\min_S f$ $\quad$ (ESISTONO PER WEIERSTRASS

QUI $\Omega = \mathbb{R}^3$ $\quad$ S è limitato $\quad$ S è chiuso $\quad$ f è continua)

S verifico l'ipotesi: $\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \neq 0$ su S

M



qui M non è chiuso in $\mathbb{R}^n$

Per trovare i pti di max / min

cerco i pti stazionari vincolati

CIOÈ cerco le sol di

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad + \quad g = 0$$

$$\begin{cases} a = 2\lambda x \\ b = 2\lambda y \\ c = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

~~moltiplico la I° per x la II° per y la III° per z e sommo~~

$\nabla f = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

$ax+by+cz = 2\lambda(x^2+y^2+z^2) = 2\lambda$ ← METTO NEL SISTEMA

$$\cancel{\begin{cases} a = ax^2+bxy+cxz \\ b = axy+by^2+cyz \\ c = axz+byz+cz^2 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}}$$

C'È UN MODO PIÙ SEMPLICE

DA CAPO!

VEDO CHE $\lambda \neq 0$ altrimenti $a=b=c=0$

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2\lambda} \\ y = \frac{b}{2\lambda} \\ z = \frac{c}{2\lambda} \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$$\frac{a^2}{4\lambda^2}+\frac{b^2}{4\lambda^2}+\frac{c^2}{4\lambda^2}=1$$

$$2\lambda = \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$x = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad y = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad z = \frac{\pm c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ (DUE PTI CRIT. VINC.)

CI CALCOLO SOPRA LA f:

$$\max_S f = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\left(a^2+b^2+c^2\right) = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\min_S f = -\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

ESEMPIO "DUALE" (scambio f e g)

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

$$g(x,y,z) = ax+by+cz \qquad P = \{g(x,y,z)=0\}$$

<u>DOMANDA</u> $\exists \max_P f \quad \exists \min_P f$

Il <u>max non esiste</u>: prendo $(x_0,y_0,z_0)\in P$ $(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

Calcolo $f(t(x_0,y_0,z_0)) = t^2 f(x_0,y_0,z_0) \longrightarrow +\infty$ a $t\to\infty$

dunque $\sup_P f = +\infty$

Il minimo è zero e il pto di min è $(0,0,0)$. Infatti

$f(x,y,z) \geq 0$ $\quad \left(f(x,y,z) > 0 \text{ se } z \neq (0,0,0) \right)$ e $f(0,0,0) = 0$

<u>VARIANTE</u> $\quad g(x,y,z) = ax + by + cz - 1$

$P = \{ ax + by + cz = 1 \}$ (piano che non passa per $(0,0,0)$)

<u>DI NUOVO</u> $\quad \boxed{\sup_{P} f = +\infty}$: $\overbrace{(x_0, y_0, z_0)}^{P_0} \in P$

$\nexists \max_{P} f$

DIVERSI $\quad \underbrace{(x_1, y_1, z_1)}_{P_1} \in P \qquad P_0 \neq P_1$

$P_t := \underbrace{P_0 + t(P_1 - P_0)}_{\text{descrive la retta per } P_0 \text{ e } P}$ (si vede che $P_t \in P \ \forall t \in \mathbb{R}$)

$$f(P_t) = \| P_0 + t(P_1 - P_0) \|^2 = \|P_0\|^2 + 2t\, P_0 \cdot (P_1 - P_0) + t^2 \underbrace{\|P_1 - P_0\|^2}_{>0}$$

$$\xrightarrow{t \to \infty} +\infty$$

Cerco il pto di minimo: CERCO $\overline{P} \in P$ di minima distanza dall'origine. $\leftarrow$ <u>DEVE ESISTERE</u> per Weierstrass generalizzato dato che $\lim_{\|P\| \to \infty} f(P) = \lim_{\|P\| \to \infty} \|P\|^2 = +\infty$

(P è chiuso ma non è <u>limitato</u>)

Per trovare $\overline{P}$ uso i moltiplicatori: $\nabla f = \lambda \nabla g$ + $g = 0$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \qquad \nabla g = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x = a\lambda \\ 2y = b\lambda \\ 2z = c\lambda \\ ax + by + cz = 1 \end{cases}$$

($\lambda \neq 0$ altrimenti $x = y = z = 0$ MA ALLORA la $IV^a \Rightarrow 0 = 1$ ASSURDO)

Moltiplico la I^a riga per a la seconda per b la III^a per c e sommo

$$2(\underbrace{ax+by+cz}_{=1}) = (\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{\neq 0})\lambda \iff \lambda = \frac{2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{a}{a^2+b^2+c^2}, \quad \bar{y} = \frac{b}{a^2+b^2+c^2}, \quad \bar{z} = \frac{c}{a^2+b^2+c^2}$$

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è il pto di minimo dist. da $(0,0,0)$

$$\text{dist}^2(P,(0,0,0)) = \frac{a^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} + \frac{c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\boxed{\text{dist}(P,(0,0,0)) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

- $f(x,y,z) = xyz \qquad g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$$S = \{x^2+y^2+z^2=1\}$$

$$\max_S xyz \;/\; \min_S xyz$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \qquad \nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Sistema: $\begin{cases} yz = 2\lambda x \\ xz = 2\lambda y \\ xy = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$

Moltiplico la I° per x, la II° per y la III° per z e sommo:

$$3xyz = 2\lambda(x^2+y^2+z^2) = 2\lambda$$

LO RIMETTO NEL SISTEMA

$$\begin{cases} yz = 3x^2yz \\ xz = 3xy^2z \\ xy = 3xyz^2 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \leftarrow \quad y=0 \;/\; z=0 \;/\; 1=3x^2$$

(1) (2) (3)

ABBIAMO VARI CASI

① $\begin{cases} y=0 \\ xz=0 \\ 0=0 \\ x^2+z^2=1 \end{cases} \iff (0,0,\pm 1)$ oppure $(\pm 1, 0, 0)$

② $\begin{cases} z=0 \\ 0=0 \\ xy=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \iff (\pm 1, 0, 0)$ oppure $(0, \pm 1, 0)$

③ $\begin{cases} x^2 = 1/3 \\ z = 3y^2 z \\ y = 3 \cdot y z^2 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ ← $z=0$ / $1 = 3y^2$

IMPOSSIBILE perché dovrebbe $y=0$ MA ALLORA LA IV^a non vale $\frac{1}{3}+0+0=1$

(OPPURE NOTO che $z=0$ l'ho già considerato)

$\begin{cases} x^2 = 1/3 \\ y^2 = 1/3 \\ z^2 = 1/3 \end{cases}$

ABBIAMO DUNQUE $\overbrace{(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0)\ (0, 0, \pm 1)}^{6 \text{ pti}}$

e $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ← (8 punti)

I PRIMI 6 PUNTI DANNO $f = 0$ (sono di flesso)

GLI ALTRI OTTO PUNTI DANNO $f = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}$ (quattro danno + quattro danno −)

$$\max_S f = \frac{1}{3\sqrt{3}} \qquad \min_S f = \frac{-1}{3\sqrt{3}}$$

CASO CON 2 moltiplicatori

$f(x,y,z) = xyz \qquad g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1, \quad g_2(x,y,z) = x+y+z$

$\mathcal{M} = \{ x^2+y^2+z^2=1, \ x+y+z=0 \}$ (INTERSECO LA SFERA E UN PIANO)

Vediamo che $\mathcal{M}$ è un vincolo regolare di codimensione 2

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ x+y+z \end{pmatrix}$$

$$J_g(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

DICO CHE $J_g(P)$ ha rango 2 se $P \in \mathcal{M}$. PER ASSURDO SUPPONIAMO che rango < 2: Allora $2y-2y=0$ $\quad 2x-2z=0$ $\quad 2y-2z=0$

$\Leftrightarrow x=y=z$. Da $x+y+z=0$ ottengo $3x=0 \Leftrightarrow x=0$

MA ALLORA NON VALE $x^2+y^2+z^2=1$ $\left(\underset{0}{3x^2}=1\right)$

Allora uso i moltiplicatori: $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$ + condizione di "$\in \mathcal{M}$"

$$\begin{cases} yz = 2\lambda x + \mu \\ xz = 2\lambda y + \mu \\ xy = 2\lambda z + \mu \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Moltiplico la I° per x, la II° per y e la III° per z e sommo

$$3xyz = 2\lambda\underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{1} + \mu\underbrace{(x+y+z)}_{0}$$

$$\boxed{2\lambda = 3xyz}$$

$$\begin{cases} yz - 3x^2yz = \mu \\ xz - 3xy^2z = \mu \\ xy - 3xyz^2 = \mu \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu = \dots \quad 2\lambda = 3xyz \leftarrow \text{NON CI INTERESSA} \\ yz - 3x^2yz = xz - 3xy^2z \leftarrow \circledast \\ yz - 3x^2yz = xy - 3xyz^2 \\ x^2+y^2+z^2=1 \quad x+y+z=0 \end{cases}$$

$\circledast$ $\quad z=0$ / $y - 3x^2y = x - 3xy^2 \Leftrightarrow y - x = 3xy(x-y)$ $\nearrow x = y$ (2) $\searrow -1 = 3xy$ (3)

(1)

(1) $\begin{cases} z=0 \\ xy=0 \\ x^2+y^2=1,\ x+y=0 \end{cases}$ $\leftarrow$ $x=0$ / $y=0$ $\quad \Rightarrow$ IMPOSSIBILE

NELLO STESSO MODO SI ESCLUDE $x=0$ o $y=0$ e POSSO SEMPL.

(2) $\begin{cases} x = y \ (\neq 0) \\ xz - 3x^3 z = x^2 - 3x^2 z^2 \\ 2x^2 + z^2 = 1 \quad , \ 2x + z = 0 \end{cases}$ $\Leftarrow$ $z - 3x^2 z = x - 3xz^2 \Leftrightarrow$ $z - x = 3xz(x-z)$ $\nearrow z = x$ (2A) $\searrow 3xz = -1$ (2B)

(2A) $\begin{cases} x = y = z \\ 3x^2 = 1 \qquad 3x = 0 \end{cases}$ IMPOSSIBILE

(2B) $\begin{cases} x = y \\ 3xz = -1 \ \neq 0 \\ 2x^2 + z^2 = 1 \quad 2x + z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = y \\ z = -2x \ , \ -6x^2 = -1 \ , \ 2x^2 + 4x^2 = 1 \end{cases}$

$y = x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \qquad z = \mp \frac{2}{\sqrt{6}} \qquad \pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

FACENDO GLI ALTRI CASI TROVO "PERMUTAZIONI" delle coordinate:

$$\boxed{\begin{array}{l} \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \\ \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1) \\ \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1) \end{array}} \Rightarrow \text{8 valori } xyz = \pm \frac{-2}{6\sqrt{6}} = \pm \frac{1}{3\sqrt{6}}$$

METODO ALTERNATIVO (uso il fatto che M è una circonferenza)

TROVO DUE VETTORI IN $P = \{x + y + z = 0\}$, ORTOGONALI

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ll} x + y + z = 0 & 2x + y = 0 \\ x - z = 0 & y = -2x \quad x = z \end{array} \right)$

M è il sostegno della curva $\gamma(t) = \frac{\vec{v}_1}{\|v_1\|} \cos(t) + \frac{\vec{v}_2}{\|v_2\|} \sin(t) \qquad 0 \le t \le 2\pi$

e allora posso studiare $\varphi(t) = f(\gamma(t))$ ....

ALLORA $\max\limits_{M} f = \max\limits_{[0,2\pi]} \varphi$ / $\min\limits_{M} f = \min\limits_{[0,2\pi]} \varphi$