Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 29 05/12/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

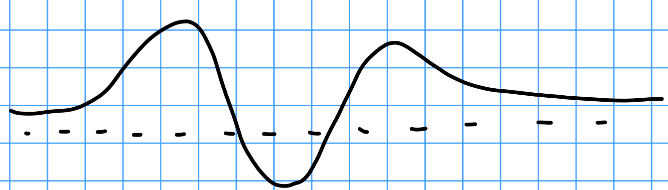
Ricevimento su appuntamento da concordare per email

2 COMMENTI DERIVANTI DAL COMPITINO

(1) Weierstrass è sufficiente ma NON NECESSARIO per avere l'esistenza dei max/min.

DUNQUE se non è vero che $\boxed{\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = +\infty / -\infty}$

ciò NON IMPLICA che $\nexists$ min / $\nexists$ max



← HA MINIMO e HA MAX anche se $\to 0$ all'infinito

(2) Per avere Weierstrass generalizzato NON BASTA fare i limiti in x e poi in y (SEPARATAMENTE)

Nel compitino $f(x,y) = 2e^{xy-2} \underbrace{-4x^2 + 2xy - y^2}_{\substack{\text{tende a } -\infty \\ \text{se } \|(x,y)\| \to \infty}} \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x,0) = -\infty$

$\shortparallel$

$\lim_{y \to \pm\infty} f(0,y) = -\infty$

MA NON È VERO CHE $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = -\infty$

(infatti $\lim_{x\to+\infty} f(x,x) = +\infty$)

3) lo scritto $\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} f(x,y)$ NON È MAI STATA DEFINITA

neanche "$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to+\infty}} f(x,y)$"

MASSIMI E MINIMI DI UNA f SU "UN VINCOLO"

ABBIAMO GIÀ DETTO $\mathcal{M}$ è un VINCOLO di codim. M

in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($\boxed{N > M}$) se esiste $g: \Omega \to \mathbb{R}^M$

di classe C^1 tale che

- Per ogni x con $g(x)=0$ si ha $J_g(x)$ ha rango M
  ($\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_M(x)$ sono lin. indip.)

- $\mathcal{M} = \{ x \in \Omega : g(x) = 0 \}$

UNA g con queste proprietà viene detta "funzione definente" per $\mathcal{M}$

Voglio considerare una $f: \Omega \to \mathbb{R}^N$ di classe $C^1(\Omega)$

- RISTRETTA AL VINCOLO $\mathcal{M}$ - e trovare (se esistono)

$$\max_{x\in\mathcal{M}} f(x) \quad / \quad \min_{x\in\mathcal{M}} f(x)$$

o anche i pti di max/min relativo per f su $\mathcal{M}$

cioè i punti $x_0 \in \mathcal{M}$ tali che $\exists \rho>0$ per cui

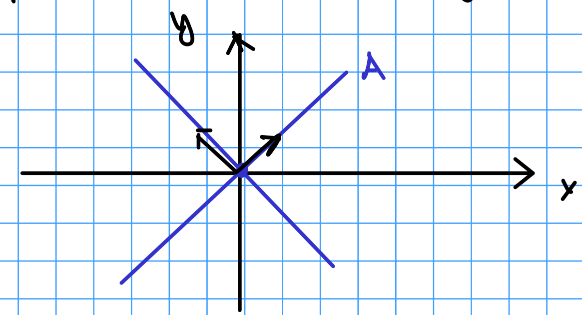
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in \mathcal{M} \cap B(x_0,\rho)$$
$$(f(x) \geq f(x_0))$$

Premettiamo una def. (generale)

Def. Considero un insieme $A \subset \mathbb{R}^N$ e $x_0 \in A$.

Dico che un vettore $\vec{v}$ ($\in \mathbb{R}^N$) è "TANGENTE" ad A in x_0 se esiste una curva γ di classe C^1, $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[$ $\varepsilon > 0$, tale che $\gamma(0) = x_0$ $\gamma'(0) = \vec{v}$, $\gamma(t) \in A$ $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

Per esempio $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\} = \{x = y\} \cup \{x = -y\}$



$P_0 = (0,0) \in A$!!

I vettori tangenti ad A in P_0 sono del tipo $\vec{v} = t(1,1)$ $t \in \mathbb{R}$ oppure $\vec{v} = t(1,-1)$ $t \in \mathbb{R}$ (E BASTA!)

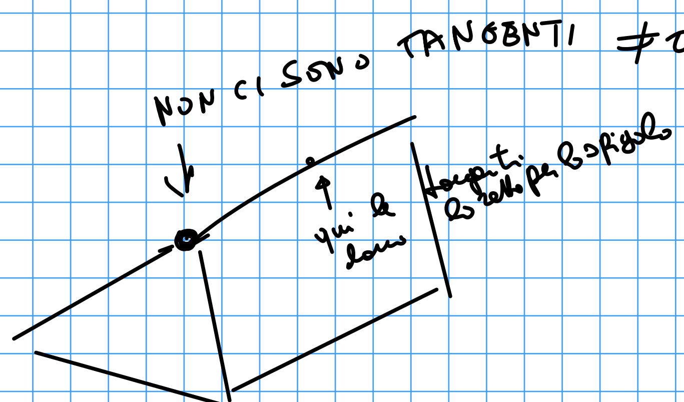
È facile vedere che $(1,1)$ è tangente perché prendo $\gamma(t) = t(1,1)$. Vedo che $\gamma(0) = (0,0)$ e $\gamma'(0) = (1,1)$

Se invece prendo $\gamma(t) = t(1,-1)$ vedo che $\gamma(0) = (0,0)$, $\gamma'(0) = (1,-1)$ dunque anche $(1,-1)$ è tangente ad A in $(0,0)$.

Con un po' di pazienza si dimostra che, se $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to A$ è C^1, $\gamma(0) = (0,0)$, $\gamma'(0) = \vec{v}$ con $\vec{v} \neq 0$

$\Rightarrow$ $\gamma(t)$ sta in $\{x = y\}$ o in $\{x = -y\}$ per t piccolo.

$\Rightarrow$ le uniche possibili tangenti sono quelle scritte sopra.



TEOREMA (tipo Fermat) Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω aperto di $\mathbb{R}^N$

$A \subset \Omega$. $x_0 \in A$. ALLORA

x_0 è punto di max/min relativo per f su A $\Big(\exists \rho > 0 : f(x) \le f(x_0)$ / $(f(x) \ge f(x_0))$ $\forall x \in A \cap B(x_0, \rho) \Big)$

$\Rightarrow$ $\forall \vec{v}$ tangente ad A in x_0 si ha $f'(x_0)(\vec{v}) = 0$

Dim. Supponiamo x_0 di minimo relativo (per esempio - il caso del max è analogo). Dunque $\exists \rho > 0$ t.c.

$\forall x \in B(x_0, \rho) \cap A \Rightarrow f(x) \ge f(x_0)$.

Sia $\vec{v}$ tangente ad A in x_0. Allora esiste $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to A$

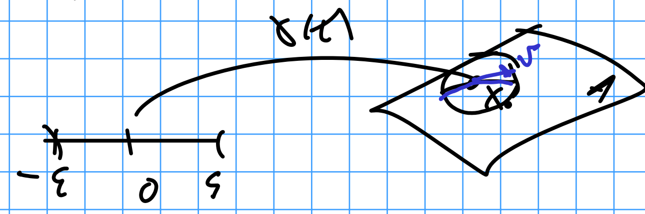
γ C^1 $\gamma(0) = x_0$ $\gamma'(x_0) = \vec{v}$.

Sicuramente $\gamma(t) \in B(x_0, \rho)$ se t è vicino a zero

(def. di limite, dato che $\gamma(0) = x_0$). Posso supporre che $\gamma(t) \in B(x_0, \rho)$ per $-\varepsilon < t < \varepsilon$ (eventualmente restringo ε)

DUNQUE $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

$$\underbrace{f(\gamma(t))}_{\text{sono delle } x \text{ in } B(x_0,\rho)} \ge f(x_0) = f(\gamma(0))$$



in altri termini $f \circ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ ha un minimo in $t = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = 0 \iff 0 = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0)$$

$$\iff \nabla f(\gamma(0)) \cdot \vec{v} = 0 \qquad (\gamma'(0) = \vec{v})$$

$$\iff f'(\gamma(0)) \vec{v} = 0 \quad \leftarrow \underline{\text{LA TESI}}$$

SI PUÒ ANCHE DIRE CHE

(★) x_0 è max/min per f su M $\Rightarrow$ $\nabla f(x_0) \perp \vec{v}$ $\forall v$ tangente a M in x_0

ADESSO BISOGNA CAPIRE COME UTILIZZARE ✪

(in part. come sono le direzioni tangenti a $\mathcal{M}$)

<u>Proposizione</u> Se $\mathcal{M}$ è un vincolo di codimensione M in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e sia $g: \Omega \to \mathbb{R}^M$ una funzione definente per $\mathcal{M}$.

Sia $x_0 \in \mathcal{M}$ e sia $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$. Allora sono equivalenti:

(a) $\vec{v}$ è tangente a $\mathcal{M}$ in x_0

(b) $J_g(x_0)\vec{v} = 0_M$ $\quad \left(\vec{v} \in \mathrm{Ker}\left(J_g(x_0)\right)\right)$

(b) $\iff$ $\vec{v}$ è perpendicolare a $\nabla g_i(x_0)$ $\forall i = 1 \dots M$ (vedi dopo)

<u>N.B.</u> $J_g(x_0): \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ dunque $\mathrm{Ker}(J_g(x))$ ha dim $\geq N-M$

Data l'ipotesi sul rango $\dim \mathrm{Ker}(J_g(x)) = N-M$ in ogni x

Dunque i vettori tangenti formano uno spazio di dim $N-M$

$\sim$ "$\mathcal{M}$ ha dimensione $N-M$"

<u>DIM.</u> (a) $\Rightarrow$ (b) Sia $\vec{v}$ tangente a $\mathcal{M}$ in x_0.

Allora esiste $\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathcal{M}$, C^1, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = \vec{v}$

MI DICE CHE $\quad g(\gamma(t)) = 0_M \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

$(g \circ \gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^M) \Rightarrow \dfrac{d}{dt} g(\gamma(t)) = 0 \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

$$\overset{\parallel}{J_g(\gamma(t))\,\gamma'(t)}$$

(derivata della composizione)

IN PARTICOLARE se $t=0$ $\quad J_g(x_0)\vec{v} = 0 \quad$ ((a) $\Rightarrow$ (b) ok)

(b) $\Rightarrow$ (a) Suppongo che $\vec{v}$ sia in $\mathrm{Ker}(J_g(x_0))$ - SUPPONIAMO PER SEMPLICITÀ CHE $J_g(x_0)$ abbia il minore delle ultime M colonne con $\det \neq 0$ (se no dovrei prendere le variabili del minore con $\det \neq 0$). Spezziamo $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^{N-M} \times \mathbb{R}^M$. Se $x \in \mathbb{R}^N$ lo scrivo $x = (x', x'')$ con $x' \in \mathbb{R}^{N-M}$ $x'' \in \mathbb{R}^M$. ($x' = x$ $x'' = y$ nel Dini)

Per il Teorema del Dini esistono $\rho > 0$ W aperto in $\mathbb{R}^{N-M}$
$x_0' \in W$ e $g : W \to \mathbb{R}^M$ tale che

$$\mathcal{M} \cap B(x_0, \rho) = \{ (x, g(x')) : x \in W \}$$

e so anche che g è C^1 e $J_g(x_0') = -\left(\frac{\partial g}{\partial x''}(x_0)\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x'}(x_0)$

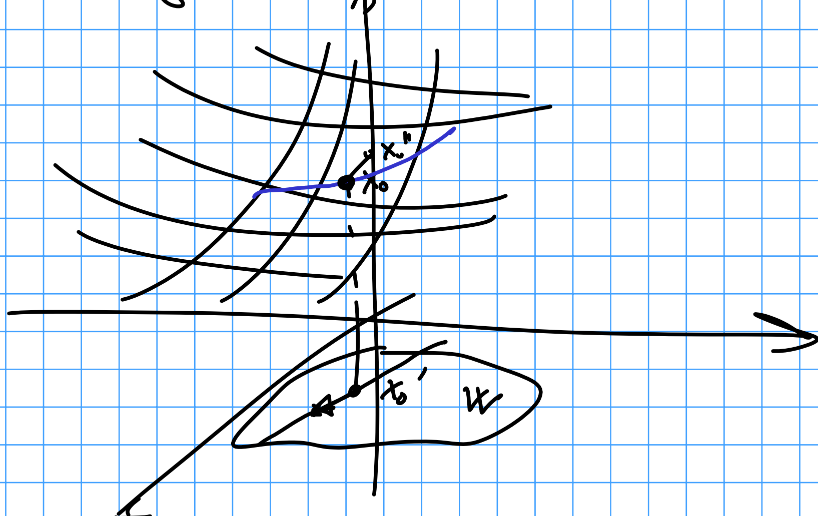
se $\vec{v} = (\vec{v}', \vec{v}'')$ definisco

$$\gamma(t) := (\underbrace{x_0' + t\vec{v}'}_{I}, \overbrace{g(x_0' + t\vec{v}')}^{II \text{ comp di } \gamma})$$

$t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

per t piccolo in modo che $x_0' + t\vec{v}' \in W$.

Per come è costruita $\gamma(t) \in \mathcal{M}$ $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$; $\gamma(0) = (x_0', g(x_0'))$
$= (x_0', x_0'')$
$= x_0$



VOGLIO DIM. CHE $\gamma'(0) = \vec{v} = (\vec{v}', \vec{v}'')$

è chiaro che la derivata di $x_0' + t v' = v'$ (PRIMA COMPONENTE

Devo dim. che $\left.\frac{d}{dt} g(x_0' + t\vec{v}')\right|_{t=0} = \vec{v}''$ (SECONDA COMPONENTE)

$$\left.\frac{d}{dt} g(x_0' + t\vec{v}')\right|_{t=0} = \left. J_g(x_0' + t\vec{v}')\right|_{t=0} \cdot \vec{v}' =$$ (sempre a causa della "chain rule" ...)

$$-\left(\frac{\partial g}{\partial x''}(x_0)\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x'}(x_0)\, \vec{v}' \overset{??}{=} \vec{v}'' \iff$$

$$-\frac{\partial g}{\partial x'}(x_0)\vec{v}' = \frac{\partial g(x_0)}{\partial x''}\vec{v}'' \iff$$

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x'}(x_0)\vec{v}' + \frac{\partial g}{\partial x''}(x_0)\vec{v}'' \iff$$

$$0 = J_g(x_0)\vec{v} \quad \Leftarrow \text{IPOTESI !!} \qquad \#$$

Teorema (moltiplicatori di Lagrange)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto $\quad f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $g : \Omega \to \mathbb{R}^M$ entrambe C^1.

$$\mathcal{M} := \{ x \in \Omega : g(x) = 0 \} \qquad (\neq \phi)$$

IPO $\quad \forall x \in \mathcal{M} \quad J_g(x)$ ha rango M

$\Updownarrow$

$\forall x \in \mathcal{M} \quad \nabla g_1(x) \dots \nabla g_M(x)$ sono lin. indip.

Se x_0 è pto di max/min rel. per f su $\mathcal{M} \Rightarrow$

$\exists\ \lambda_1 \dots \lambda_M \in \mathbb{R}$ tali che $\quad$ (λ_i MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE)

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \dots + \lambda_M \nabla g_M(x_0) \quad \left(= \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \nabla g_i(x_0) \right)$$

DIM. Se x_0 è di MAX/MIN rel. $\Rightarrow \forall \vec{v}$ tangente a $\mathcal{M}$ in x_0

$$\nabla f(x_0) \perp \vec{v} \qquad \text{(teorema tipo Fermat)}$$

Ma tali $\vec{v}$ sono esattamente i vettori $\vec{v}$ con $\nabla g_i(x_0) \cdot \vec{v} = 0$ $\quad i = 1 \dots M$

$$\left(J_g(x_0) \begin{bmatrix} \nabla g_1^t \\ \vdots \\ \nabla g_M^t \end{bmatrix} \qquad J_g(x_0)\vec{v} = \begin{pmatrix} \nabla g_1 \cdot \vec{v} \\ \vdots \\ \nabla g_M \cdot \vec{v} \end{pmatrix} \right)$$

Poniamo $\mathcal{N} = \text{span}(\nabla g_1(x_0) \dots \nabla g_M(x_0)) = \{ \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \dots + \lambda_M \nabla g_M(x) \ \lambda_1 \dots \lambda_M \in \mathbb{R} \}$

allora $\quad \vec{v} \in \text{Ker}\, J_g(x_0) \iff \vec{v} \perp \mathcal{N}$ $\qquad$ HA DIM. M !!

DUNQUE METTENDO INSIEME LE COSE HO

$$\nabla f(x_0) \perp \vec{v} \qquad \forall \vec{v} \in \mathcal{N}^\perp$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0) \in (\mathcal{N}^\perp)^\perp = \mathcal{N} \qquad \text{cioè}$$

$$\nabla f(x_0) \in \text{Span}(\nabla g_1 \dots \nabla g_M) \qquad \text{in}$$

altri termini $\exists\, \lambda_1 \dots \lambda_M$ per cui vale la tesi.

<u>OSS.</u> Dal punto di vista geometrico ho dim che

$\nabla f(x_0)$ è "nello spazio normale a $\mathcal{M}$ in x_0"

dove posso definire, $\forall x_0 \in \mathcal{M}$

$T_{\mathcal{M}}(x_0)$ = spazio tangente a $\mathcal{M}$ in x_0 = $\text{Ker}\, J_g(x_0)$

$N_{\mathcal{M}}(x_0)$ = spazio normale a $\mathcal{M}$ in x_0 = $\text{Ker}\, J_g(x_0)^\perp$ = $\text{span}(\nabla g_1(x_0) \dots \nabla g_M(x_0))$

$T_{\mathcal{M}}(x_0)$ e $N_{\mathcal{M}}(x_0)$ sono perpendicolari tra loro

$T_{\mathcal{M}}(x_0)$ ha dim $N-M$ $\quad$ $N_{\mathcal{M}}(x_0)$ ha dim M

$$\Rightarrow \quad T_{\mathcal{M}}(x_0) \oplus N_{\mathcal{M}}(x_0) = \mathbb{R}^N$$

<u>DEF.</u> Dato che $x_0 \in \mathcal{M}$ t.c. $\exists\, \lambda_1 \dots \lambda_M \in \mathbb{R}$ per cui

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \dots + \lambda_M \nabla g_M(x_0)$$

È "PTO CRITICO / STAZIONARIO VINCOLATO per f su $\mathcal{M}$"

<u>ES.</u> $\mathcal{M} = \{x^2+y^2 = 1\}$ $\qquad$ $f(x,y) = xy$

$g(x,y) = x^2+y^2-1$ (funzione definente, $N=2$, $M=1$)

$$J_g = \left[\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right] = [2x, 2y] \qquad \left(\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}\right)$$

ha rango 1 se $(x,y) \in M$. Infatti se $(x,y) \in \mathcal{M}$ almeno uno tra x e y è $\neq 0$ $\Rightarrow$ il rango è 1.

M è un vincolo regolare di codimensione 1 (dim = 1)

- M è limitato e chiuso $\Rightarrow$ (Weierstrass) $\exists$ x_1 di min, x_2 di max

$f(x,y) = xy$ è continua

LI TROVO COI MOLTIPLICATORI : $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} y = \lambda 2x \\ x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

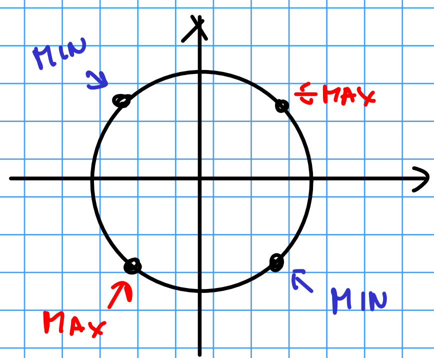
$y = 2\lambda x = 4\lambda^2 y$

o $y = 0$ o $\lambda = \pm 1/2$

$y = 0 \Rightarrow x = 0$ IMPOSSIBILE

$$\begin{cases} y = \pm x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$(x,y) = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ QUATTRO PUNTI



$f\left(\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$ = MAX

$f\left(\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}$ = MIN

$$\psi(a,b) = \sqrt{a^2+b^2} \qquad J_\psi = \left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} , \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right]$$

$$J_{f \circ g} = J_f(g) \cdot J_g$$