Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 28 30/11/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Ancora un'osservazione sull'esercizio di ieri:

$$g(x,y,w,z) = \begin{pmatrix} xy - wz - 2 \\ xz + wy \end{pmatrix} \qquad P_0 = (1,1,-1,1)$$

$$J_g(x,y,w,z) = \begin{bmatrix} y & x & -z & -w \\ z & w & y & x \end{bmatrix} \qquad J_g(1,1,-1,1) = \begin{array}{cccc} x & y & w & z \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Avevamo visto che su $\mathcal{M} = \{ g = (0,0) \}$ vicino a $P_0 = (1,1,-1,1)$ posso "esplicitare"

$$w = w(x,y) \qquad\qquad x = x(y,z)$$
oppure
$$z = z(x,y) \qquad\qquad w = w(y,z)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \dots$$

IL TEOREMA NON FUNZIONA SE VOGLIO ESPLICITARE

$y = y(x,z)$ $w = w(x,z)$ perché il relativo minore è

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \det = 0$$

IL TEOREMA IN GENERALE MI DÀ UNA CONDIZIONE SUFF.
(NON POSSO ESCLUDERE IN GENERALE che si possano lo stesso

esplicitare $y$ e $w$ ) VEDIAMO PERÒ CHE $y$ e $w$ non si possono esplicitare in termini di $x$ e $z$ :

ABBIAMO IL SISTEMA :

$$\begin{cases} xy - wz = 2 \\ xz + wy = 0 \end{cases}$$

e vorrei risolverlo in $(y, w)$ tenendo $x$ e $z$ come parametri ( $x \simeq 1$ $z \simeq 1$ - cerco le sol $y \simeq 1$ $w \simeq -1$ )

Dalla prima riga $y = \dfrac{2 + wz}{x}$ ( $x \simeq 1 \Rightarrow x \neq 0$ )

lo inserisco nella II$^a$ riga $\Rightarrow$

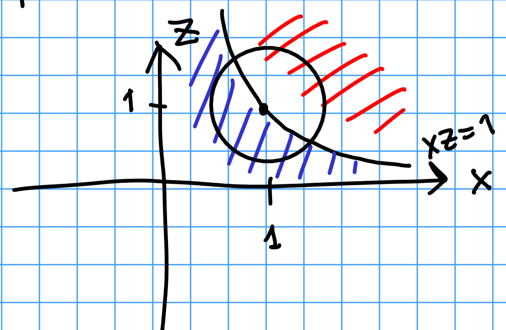
$$xz + w\frac{(2+zw)}{x} = 0 \iff x^2 z + 2w + zw^2 = 0$$

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - x^2 z^2}}{z}$$

( se $x=1$ $z=1$ TROVO $w = -1$, $y = 1$ )

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{\underbrace{1 - x^2 z^2}_{\Delta}}}{x}$$

VEDO CHE, quando $(x, z) \simeq (1,1)$ entrambe le sol$^r$ mi danno $(y, w) \simeq (1, -1)$. INOLTRE se $(x, z) \simeq (1,1)$ SE ESISTONO possono non esistere $(y, w)$




Sui punti $x>0, z>0$ $xz = 1$ ho $\Delta = 0$

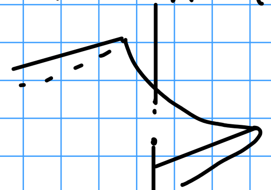
Sui punti $x>0, z>0$ $xz > 1$ ho $\Delta < 0$

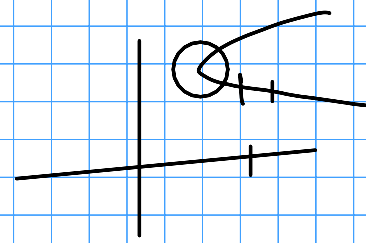
sui punti $x>0, z>0$ $xz < 1$ ho $\Delta > 0$

Se $(x, z) \in$ ZONA BLU $\Rightarrow$ DUE SOL. ( che tendono a $(1, -1)$ quando $(x, z) \to (1, 1)$ )

Se $(x, z) \in$ ZONA ROSSA $\Rightarrow$ $\nexists$ soluzioni

" VICINO A $(1,1)$ " C'È UNA PIEGA "





ABBIAMO STUDIATO $\quad \mathcal{M} = \{ (x,y) \in \Omega : \quad g(x,y) = 0 \}$

nell'ipotesi: $\quad \det\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) \neq 0$

PIU' IN GENERALE $\quad$ prendiamo $\quad N > M \quad$ ($N$ è il vecchio $N+M$)

e $\quad g: \Omega \to \mathbb{R}^M \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^N$

IPOTESI $\qquad$ RANGO $J_g(P_0) = M$

(dunque esistono $i_1 < \cdot < i_M$ - $M$ INDICI TRA $1$ ed $N$ - tali che il minore fatto con le colonne $i_1 \cdots i_M$ ($M \times M$) abbia $\det \neq 0$)

(EX: Se $N = 6 \quad M = 3$ devo scegliere $i_1 < i_2 < i_3 \in \{1, \cdots, 6\}$
$i_1 = 1 \quad i_2 = 3 \quad i_3 = 5$ per es.)

OPPURE $\quad J_g(P_0)$ ha $M$ colonne lin. indip $\iff$
tutte le righe di $J_g(P_0)$ sono lin. indip. $\iff$
$\nabla g_1 \cdots \nabla g_M$ sono lin. indip.

Posso chiamare $\tilde{x} = (x_{i_1}, \dots x_{i_M})$ e
$\hat{x}$ il vettore delle altre $N-M$ variabili

Allora $\quad \exists\, \rho > 0 \quad \exists\, W$ intorno di $\hat{P}_0$ e $f: W \to \mathbb{R}^M$
tale che

$$\mathcal{M} \cap B(P_0, \rho) = \{ \underbrace{(\hat{x}, \tilde{x})}_{\text{rimescolati}} : \hat{x} \in W \quad \tilde{x} = f(\hat{x}) \}$$

DEF $\quad$ Dico che $\mathcal{M}$ è un "VINCOLO" di codimensione $M$
in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (dove $N > M$)

se esiste una $g : \Omega \to \mathbb{R}^M$, di classe $C^1$, tale che

$$(*) \quad \text{rango}\left(J_g(\underline{P})\right) = M \quad \forall\, \underline{P} \text{ con } g(P) = 0,$$

per cui $\mathcal{M} = \{ P \in \Omega : g(P) = 0 \}$

(DUNQUE, PER IL DINI, in ogni pto $P_0 \in \mathcal{M}$, riesco a descrivere $\mathcal{M} \cap B(P_0, \rho)$, $\rho > 0$ piccolo, come grafico di opportune $N-M$ variabili nelle restanti $M$ variabili)

CASO PARTICOLARE IMPORTANTE $\boxed{(M=1)}$

Se $\mathcal{M} = \{ x \in \Omega : g(x) = 0 \}$ dove $g : \Omega \to \mathbb{R}$

e si ha

$$\nabla g(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{M}$$

Allora $\mathcal{M}$ è un vincolo di codimensione 1 - lo posso anche chiamare ipersuperficie in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

TIPICAMENTE AVREMO

- UN "DOMINIO" dato da $D = \{ g(x) \leq 0 \}$ (chiuso)

la cui frontiera $\partial D = \{ g(x) = 0 \}$

e in questo $D$ cercheremo i pti di max / min di una $f : D \to \mathbb{R}$