Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 26   28/11/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

TEOR. (INVERSIONE LOCALE)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto $x_0 \in \Omega$ $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$. f è $C^1(\Omega)$ e

$$\det J_f(x_0) \neq 0 \qquad (\exists\ J_f(x_0)^{-1})$$

ALLORA $\exists\ \rho > 0$ tale che

(a) f è iniettiva su $B(x_0, \rho)$

(b) $\Omega_1 := f(B(x_0,\rho)) \left(= \{y \in \mathbb{R}^N : \exists\, x \in B(x_0,\rho) \text{ con } f(x) = y\}\right)$
È APERTO

(c) se $g = f^{-1}$ " (g è l'inverso di f ristretta a $B(x_0,\rho)$)

$\Rightarrow$ g è $C^1(\Omega_1)$ e

$$J_g(y) = J_f(x)^{-1} \qquad \text{con } x \text{ t.c. } f(x) = y$$

CIOÈ
$$J_g(y) = J_f(f^{-1}(y))^{-1}$$

Dim. Poniamo

$$\phi(x) = x - \underbrace{J_f(x_0)^{-1}}_{\text{MATRICE COSTANTE}} f(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

Noto che
$$J_\phi(x) = I - J_f(x_0)^{-1} J_f(x)$$

se metto $x = x_0$ trovo $J\phi(x_0) = I - Jg(x_0)^{-1} Jg(x_0) = I - I = 0$

Quindi (essendo queste matrici continue in x) trovo $\rho > 0$ per cui

① $$\| J\phi(x) \| < \frac{1}{2} \quad \text{se} \quad x \in B(x_0, \rho)$$

② Da ① ricavo (vista l'altra volta)

$$\| \phi(x_1) - \phi(x_2) \| \leq \frac{1}{2} \| x_1 - x_2 \| \quad \forall x_1, x_2 \in B(x_0, \rho)$$

③ Prendo $x_1, x_2 \in B(x_0, \rho)$ e ↙ guardare la def di ϕ

$$\| x_1 - x_2 \| = \| \phi(x_1) - \phi(x_2) + Jg(x_0)^{-1} (g(x_1) - g(x_2)) \| \leq$$

$$\| \phi(x_1) - \phi(x_2) \| + \| Jg(x_0)^{-1} \| \| g(x_1) - g(x_2) \| \leq \quad (\text{per } ②)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \| x_1 - x_2 \|} + \| Jg(x_0)^{-1} \| \| g(x_1) - g(x_2) \|$$

Porto a sx il termine e trovo

$$\frac{1}{2} \| x_1 - x_2 \| \leq \| Jg(x_0)^{-1} \| \| g(x_1) - g(x_2) \| \quad \Longrightarrow$$

(X) $$\| g(x_1) - g(x_2) \| \geq \frac{1}{2 \| Jg(x_0)^{-1} \|} \| x_1 - x_2 \| \quad \forall x_1, x_2 \in B(x_0, \rho)$$

$\boxed{\text{DUNQUE}}$ vale (a) cioè g è iniettiva in $B(x_0, \rho)$

Ne segue che è ben definita $g = g^{-1}$ su $\Omega_1 = g(B(x_0, \rho))$

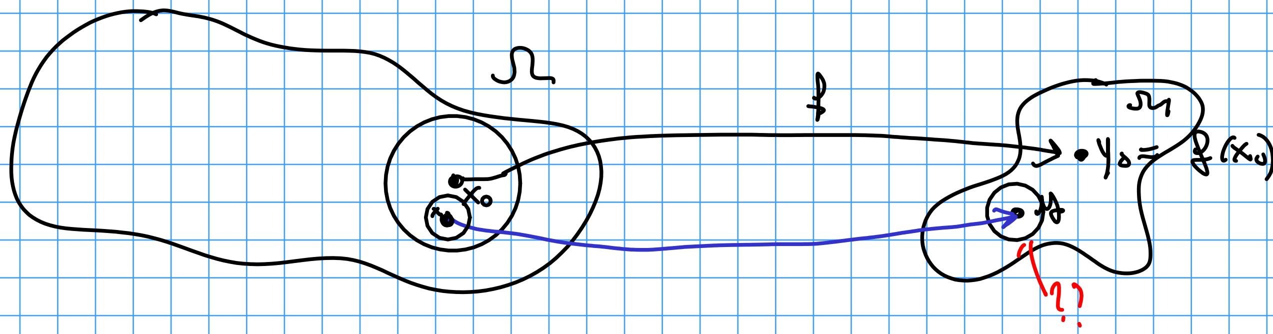
più precisamente $g = \left(g|_{B(x_0,\rho)} \right)^{-1}$. Da (X)

$$\| y_1 - y_2 \| \geq \frac{1}{2 \| \quad \|} \| g(y_1) - g(y_2) \| \quad \forall y_1, y_2 \in \Omega_1$$

$$\| g(y_1) - g(y_2) \| \leq 2 \| Jg(x_0)^{-1} \| \| y_1 - y_2 \|$$

cioè $g : \Omega_1 \to B(x_0, \rho)$ <u>È CONTINUA</u>

<u>DIMOSTRO CHE Ω_1 è aperto</u>



Prendo $y \in \Omega_1$ e cerco di dim. che $\exists\, \delta > 0$ tale che $B(y,\delta) \subset \Omega_1$. So che $\exists\, x \in B(x_0,\rho)$ per cui $f(x) = y$. Prendo $\rho' > 0$ in modo che

$B(x,\rho') \subset B(x_0,\rho)$. Prendo $0 < \delta < \dfrac{\rho'}{2\|J_f(x_0)^{-1}\|}$

e prendo $y' \in B(y,\delta)$. Definisco

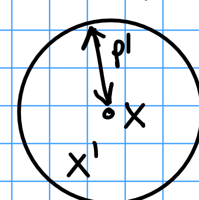
$$\phi_{y'}(x') = x' - J_f(x_0)^{-1}(f(x') - y') = \phi(x') + J_f(x_0)^{-1} y'$$

$$\left(\phi_{y'}(x') = x' \iff J_f(x_0)^{-1}(f(x') - y') = 0 \iff f(x') = y' \right)$$

Se trovo un pto fisso per $\phi_{y'}$ $\Rightarrow$ trovo x' per cui $f(x') = y'$

QUESTA $\phi_{y'}$ verifica ancora $\|\phi_{y'}(x') - \phi_{y'}(x'')\| \le \frac{1}{2}\|x' - x''\|$

perché $\phi_{y'} = \phi$ + costante DUNQUE $\phi_{y'}$ è UNA CONTRAZIONE.
Serve che $\phi_{y'}$ MANDI $B(x,\rho')$ IN SÉ STESSO. Se questo è vero $\Rightarrow$ $\phi_{y'}$ ha un pto fisso e abbiamo dimostrato che $y' \in \Omega'$ $\forall\, y' \in B(y,\delta)$.



In effetti se $x' \in B(x,\rho')$ allora

$$\|\phi_{y'}(x') - x\| = \|\phi_{y'}(x') - \phi_{y'}(x) + \phi_{y'}(x) - \underbrace{\phi_y(x)}_{=x}\| \le$$

$$\left(\phi_y(x) = x - J(x_0)^{-1}(\underbrace{f(x) - y}_{=0}) \right)$$

$$\|\phi_{y'}(x') - \phi_{y'}(x)\| + \|\phi_{y'}(x) - \phi_y(x)\| \le$$
$$\frac{1}{2}\|x' - x\| + \|J_f(x_0)^{-1}\|\,\|y - y'\| \le \frac{\rho'}{2} + \|J_f(x_0)^{-1}\|\,\delta < \rho'$$

dato che $\|J_f(x_0)^{-1}\|\,\delta < \frac{\rho'}{2}$ cioè $\delta < \frac{\rho'}{2\|J_f(x_0)^{-1}\|}$

DUNQUE $\Phi_{y'}$ MANDA $B(x_0,\rho')$ IN SÉ e tutto torna

HO DIMOSTRATO CHE Ω_1 è aperto

$y_0 = f(x_0)$

(c) DIMOSTRO CHE g è C^1 e che $J_g(y) = J_f(x)^{-1}$ se $f(x)=y$

se $\boxed{x \in B(x_0,\rho)}$, per la proprietà $*$, si ha che

$$\det(J_f(x)) \neq 0 \iff \exists\, J_f(x)^{-1}$$

So che $\underset{y'}{f(x')} = \underset{y}{f(x)} + J_f(x)(x'-x) + \sigma(x')\|x'-x\|$

con $\sigma(x') \to 0$ se $x' \to x$. Poniamo $y = f(x)$

se $y' \in \Omega_1$ prendo x' tale che $f(x') = y'$. DA

$$y' = y + J_f(x)\big(g(y') - g(y)\big) + \sigma(g(y'))\|g(y') - g(y)\|$$

sposto y a sinistra e applico $J_f(x)^{-1}$ $\Rightarrow$

$$J_f(x)^{-1}(y'-y) = g(y') - g(y) + J_f(x)^{-1}\big(\sigma(-)\|g(y')-g(y)\|\big)$$

$$\Updownarrow$$

$$g(y') = g(y) + J_f(x)^{-1}(y'-y) \underbrace{- J_f(x)^{-1}\big(\sigma(g(y'))\| \quad \|\big)}_{(*)}$$

si vede che questo robo è $o(\|y-y'\|)$ cioè $\frac{\|(*)\|}{\|y-y'\|} \xrightarrow{y'\to y} 0$

$$g(y') = g(y) + J_f(x)^{-1}(y-y') + o(\|y-y'\|)$$

che mi dice che g è differenziabile in y e che

$$J_g(y) = J_f(x)^{-1} \qquad (y = f(x)\ !)$$

Dato che $J_f(x)^{-1}$ dipende con continuità da x $\Rightarrow$

(g è continua) $J_f(g(y))^{-1}$ dipende con continuità da y $\Rightarrow$

g è di classe C^1 ($y \mapsto J_g(y)$ è continua!!)

#

ESEMPIO Considero la "mappa" $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

È chiaro che f è C^1 (C^∞) e che

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

$\det J_f(x,y) = 4(x^2+y^2) > 0$ se $(x,y) \neq (0,0)$.

Se $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ so che f è invertibile vicino a (x_0,y_0)

e che $J_{f^{-1}}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}^{-1}$ se $\begin{matrix} x^2-y^2 = \xi \\ 2xy = \eta \end{matrix}$

$$= \frac{1}{4(x^2+y^2)} \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{bmatrix} = \frac{1}{2(x^2+y^2)} \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

(se metto $x = 1, y = -1$
$\frac{1}{2 \cdot 2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$)

Indico $g(\xi,\eta) = f^{-1}(\xi,\eta)$ (RISTRETTA!) PROVO A CALCOLARE g

(Ho usato $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$)

RISOLVO IL SISTEMA (NON LINEARE)

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \xi \\ 2xy = \eta \end{cases}$$

DATI ξ, η cerco le x, y che risolvono il sistema

CASO $\eta = 0$ Allora $x=0$ oppure $y=0$

$x=0 \Rightarrow \xi = -y^2 \iff \xi \leq 0$ e $y = \pm\sqrt{-\xi}$

$y=0 \Rightarrow \xi = x^2 \iff \xi \geq 0$ e $x = \pm\sqrt{\xi}$

DUNQUE Se $(\xi, \eta) = 0$ ho sol. $(x,y) = (0,0)$

Se $\eta = 0 \quad \xi > 0$ ho le sol. $\pm(\sqrt{\xi}, 0)$

Se $\eta = 0 \quad \xi < 0$ ho le sol. $\pm(0, \sqrt{-\xi})$

COMUNQUE HO 2 CONTROIMMAGINI (a parte il caso $(0,0)$)

e quindi g NON è invertibile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$)

VEDIAMO IL CASO $\eta \neq 0$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \xi \\ 2xy = \eta \end{cases}$$

Dalla secondo rigo trovo $x \neq 0,\ y \neq 0$ e $y = \dfrac{\eta}{2x}$

Lo metto nella primo rigo:

$$x^2 - \frac{\eta^2}{4x^2} = \xi \iff 4x^4 - 4\xi x^2 - \eta^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{4\xi \pm \sqrt{16\xi^2 + 16\eta^2}}{8} = \frac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2}$$

QUELLA CON IL + È >0

QUELLA CON IL − È <0 – NON VA!

$$\boxed{x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}{2}}}$$

$$y = \frac{\eta}{2x} = \pm\frac{\eta}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{\xi+\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{2}}} = \boxed{y = \pm\,\mathrm{sgn}(\eta)\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}{2}}}$$

$$\pm\frac{\eta}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{\xi+\sqrt{\xi^2+\eta^2}}} = \pm\eta\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}{2\eta^2}} = \pm\,\mathrm{sgn}(\eta)\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\eta}{2}}$$

DUE CONTROIMMAGINI DI (ξ,η)

METTIAMOCI IN UN PUNTO (x_0, y_0) per esempio

$(1,-1)$ $\qquad f(1,-1) = (0,-2)$

Le controimmagini di $(0,-2)$ – se guardo le formule sono $(\xi=0,\ \eta=-2)$

$$\boxed{x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}{\sqrt{2}}}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{4}+0}{2}} = \pm 1$$

$$y = \mp\sqrt{\frac{\sqrt{4}-0}{2}} = \mp 1$$

$$= \boxed{y = \pm\,\mathrm{sgn}(\eta)\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}{\sqrt{2}}}}$$

TROVO $(1,-1)$ e $(-1,1)$. Quello da cui sono partito corrisponde al segno +

DUNQUE, VICINO A $(1,-1)$ la funzione $g = f^{-1}$ è data da

$$g(\xi,\eta) = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}{2}},\ -\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}{2}}\right)$$

Calcoliamo $J_g(\xi,\eta)$ $\quad$ (e poi $J_g(0,-2)$)

$$\frac{\partial g_1}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\dfrac{\cancel{2}\xi}{\cancel{2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}} + 1}{2\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}} = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2+\eta^2}}{2\sqrt{2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}} \longrightarrow \left(\begin{array}{c} \xi=0 \quad \eta=-2 \\ \dfrac{2}{2\sqrt{2}\,2\sqrt{2}} \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \eta} = \frac{\dfrac{\cancel{2}\eta}{\cancel{2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}}}{2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}} = \frac{\eta}{2\sqrt{2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\xi}} \longrightarrow \left(\frac{-2}{2\sqrt{2}\,2\sqrt{2}} \right)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \xi} = -\frac{\dfrac{\cancel{2}\xi}{\cancel{2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}} - 1}{2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}} = \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}{2\sqrt{2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \eta} = -\frac{\dfrac{\cancel{2}\eta}{\cancel{2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}}}{2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}} = \frac{-\eta}{2\sqrt{2}\sqrt{\xi^2+\eta^2}\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\xi}}$$

Mettiamo $\boxed{\xi=0 \qquad \eta=-2}$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \qquad \frac{\partial g_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{4} \qquad \frac{\partial g_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \qquad \frac{\partial g_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}$$

$$J_g(0,-2) = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

VEDIAMO COSA AVEVAMO PRIMA → A

TORNA