Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 25 25/11/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 28 novembre 2016 - PARTE A[1]

1. Scrivere la definizione di funzione differenziabile e di differenziale (2 p.)

2. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{9x^2 + 4y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

   è continua $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$;
   è differenziabile $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$.
   (1 p. per domanda).

3. Se $f(x,y) = (x-1)e^{x-y}$ si scriva il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato nel punto $(1,1)$ (è consentito scrivere il polinomio nelle variabili $(x-1)$ e $(y-1)$, senza sviluppare tutte le potenze di questi binomi) (2 p.):

[1] PUNTEGGIO MINIMO Voto A≥ 4; Voto A+Voto B≥ 10 Tempo: 1/2 ora per la parte A, 1 ora per la parte B

(2)

- $|f(x,y)| = \left| \frac{x^2 y}{9x^2+4y^2} \right| \leq \frac{x^2}{9x^2+4y^2} |y| \leq \frac{1}{9} |y| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

Dunque f è continua in zero

- $f'(0)(\vec{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t^2 v_x^2 \, t v_y}{9t^2 v_x^2 + 4t^2 v_y^2} = \frac{v_x^2 v_y}{9v_x^2+4v_y^2}$ ← NON LINEARE IN $\vec{v}$

$\vec{v} = (v_x, v_y)$

(3) $f(x,y) = (x-1)\, e^{x-y}$ Pongo $x = 1+\xi$ $y = 1+\eta$

$g(\xi,\eta) = f(1+\xi, 1+\eta) = \xi\, e^{\xi-\eta}$

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \Rightarrow e^{\xi-\eta} = 1 + (\xi-\eta) + \frac{(\xi-\eta)^2}{2} + o(\|\xi,\eta\|^2)$

$\Rightarrow g(\xi,\eta) = \xi\left(1 + \xi - \eta + \frac{\xi^2}{2} - \xi\eta + \frac{\eta^2}{2} + o(\|\xi,\eta\|^2)\right) =$

$\underbrace{\xi + \xi^2 - \xi\eta + \frac{\xi^3}{2} - \xi^2\eta + \frac{\xi\eta^2}{2}}_{P_{3,(0,0)}(\xi,\eta) =} + o(\|\xi,\eta\|) \Rightarrow$

$P_{3,(1,1)}(x,y) = (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2 - (x-1)^2(y-1) + \frac{(x-1)(y-1)^2}{2}$

(4) $g(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy} + 3x \\ e^{xy} - y \end{pmatrix} \Rightarrow J_g(x,y) = \begin{bmatrix} y e^{xy} + 3 & x e^{xy} \\ y e^{xy} & x e^{xy} - 1 \end{bmatrix}$

$g(0,0) = (1,1) \Leftrightarrow g^{-1}(1,1) = 0$

(a) $J_{g^{-1}}(1,1) = J_g(0,0)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $f(\xi,\eta) = g^{-1}(2\xi-\eta, \xi+2\eta) = g^{-1}(h(\xi,\eta))$ dove $h(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} 2\xi-\eta \\ \xi+2\eta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow J_f(\xi,\eta) = J_{g^{-1}}(h(\xi,\eta))\, J_h(\xi,\eta) \Rightarrow$ $\left(h\left(\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$J_f\left(\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right) = J_{g^{-1}}(1,1)\, J_h\left(\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

4. Sia $g(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy} + 3x \\ e^{xy} - y \end{pmatrix}$. Si dia per scontato che g^{-1} è ben definita dove serve.

   (a) si calcoli la matrice jacobiana di g^{-1} nel punto $(1,1)$ (2p.);

   (b) posto $f(\xi,\eta) := g^{-1}(2\xi - \eta, \xi + 2\eta)$ si calcoli la matrice jacobiana di f nel punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ (2p.):

Ingegneria Aerospaziale, Compitino del 28 novembre 2016 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := x^2y^2 + \dfrac{4}{x^2+y^2}$.

   (a) Si dica qual è il dominio di f (1p.)

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \{(x,y) : (x,y) \neq (0,0)\}$$

   (b) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (6p.).

$$f(x,y) = x^2y^2 + \frac{4}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 - \frac{8x}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - \frac{8y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2 - 8\,\frac{(x^2+y^2)^{\cancel{2}} - x\,2\cancel{(x^2+y^2)}\,2x}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}\,3}} = 2y^2 - 8\,\frac{x^2+y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^3} = 2y^2 - 8\,\frac{y^2-3x^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \ldots = 2x^2 - 8\,\frac{x^2-3y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy - 8x\,\frac{-2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4} = 4xy + \frac{32xy}{(x^2+y^2)^3} = 4xy\left(1 + \frac{8}{(x^2+y^2)^3}\right)$$

PTI CRITICI

$$\begin{cases} 2xy^2 = \dfrac{8x}{(x^2+y^2)^2} \\ 2x^2y = \dfrac{8y}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

Se $x=0$ ⇒ la prima è OK, dalla seconda trovo $y=0$. MA $(0,0) \notin$ DOMINIO
se $y=0$ ⇒ la seconda è OK, dalla prima ricavo $x=0$, MA $(0,0) \notin$ DOMINIO
POSSO SEMPLIFICARE x nella prima e y nella seconda

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{4}{(x^2+y^2)^2} \\ x^2 = \dfrac{4}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \Rightarrow x^2 = y^2.$$

Metto $x^2=y^2$ nel sistema ⇒

$$x^2 = \frac{4}{4x^4} \iff x^6 = 1 \iff x = \pm 1 \qquad y = \pm x$$

DUNQUE HO 4 PTI $(\pm 1, \pm 1)$

Vediamo gli Hessiani $+$ per $\pm(1,1)$ e $-$ per $\pm(1,-1)$

$$H_f(\pm 1, \pm 1) = \begin{bmatrix} 4 & \pm 8 \\ \pm 8 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det = 16 - 64 < 0$$

TUTTI PUNTI DI SELLA

(c) Si trovino il massimo e il minimo di f sull'insieme $D := \{x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ (5p.)

NON RIENTRA NEL I° COMPITINO

2. Sia $V := \{(x, y, z) : e^{x^2+y^2+z^2} - xy = e\}$

(a) Si verifichi che V è un insieme regolare di codimensione 1 (3p.)

NON RIENTRA NEL I° COMPITINO

(b) Si verifichi che $P_0 := (0, 1, 0) \in V$ e si mostri che vicino a P_0 l'insieme V si descrive come grafico di una funzione $y = f(x, z)$ con f definita in un intorno di $(0, 0)$ (2p.).

NON RIENTRA NEL I° COMPITINO

(c) Si calcolino $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0, 0)$ (3p.)

(d) Si dica se V è limitato (3p.)

(e) (facolativo - verrà considerato solo se il voto del resto è ≥ 24) Si mostri che i punti di V più lontani dall'origine si trovano sul'intersezione di V con la retta $\{z = 0, x = y\}$ (4p.)

2021-11-25 Primo Compitino Analisi 2

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**null**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.

1. Email *

Istruzioni di compilazione: Si usi:
· lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;
· il carattere ^ per indicare la potenza: `2^3` per 2^3;
· le combinazioni >= per il maggiore o eguale $\geq$ e <= per il minore o eguale $\leq$: `1<=2` per $1 \leq 2$;
· il carattere _ per indicare l'indice: `a_n` per a_n;
· `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;
· `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;
· `Pi` per π;
· le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;
· le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;
· per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40.

ATTENZIONE ALLA SCADENZA DEL TEMPO (1 ora e 15 minuti)

2. Cognome

3. Nome

4. Matricola

5. Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

Esercizio Uno

Consideriamo i seguenti insiemi:

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^{xy} > 1, x \geq 0, y < 2\right\},$$
$$B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 2\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \leq 2\right\}$$

6. 2 punti

Si dica se A è aperto:

Contrassegna solo un ovale.

- Vero
- Falso

7. 2 punti

Si dica se B è chiuso:

Contrassegna solo un ovale.

- Vero
- Falso

① (a) Noto che $e^{xy}>1, x\ge 0, y<2 \iff xy>0, x\ge 0, y<2$

$\Rightarrow x>0, y>0$ DUNQUE A si può scrivere come

$A=\{x>0,\ 0<y<2\}$ che è APERTO

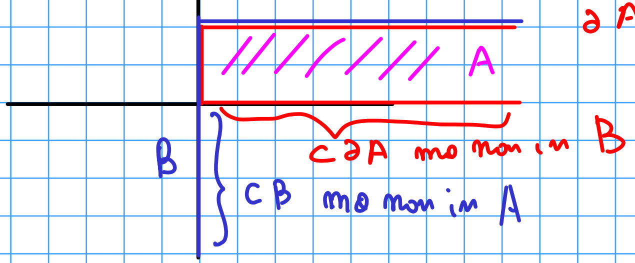
dato che tutte le disuguaglianze sono forti e le funzioni $(x,y)\mapsto x$ $(x,y)\mapsto y$ SONO CONTINUE

(b) B è chiuso in quanto unione di chiusi

$$B=\{x\ge 0,\ y=2\}\cup\{x=0,\ y\le 2\} =$$

$$\underbrace{\{x\ge 0\}\cap\{y=2\}}_{\text{intersezione di chiusi è chiuso}} \cup \underbrace{\{x=0\}\cap\{y\le 2\}}_{\text{intersezione di chiusi è chiuso}}$$

(c) NON C'È NESSUNA INCLUSIONE TRA B e ∂A



② $\nabla f(1,1)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ $\quad \gamma(t)=(t,t^2)$ $\quad \gamma'(t)=(1,2t)$

$\varphi(t)=f(\gamma(t,t)) \Rightarrow \varphi'(t)=\nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$

$$\varphi'(1)=\nabla f(\gamma(1))\cdot\gamma'(1)=\nabla f(1,1)\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=-1$$

③ $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2+y^4}$ (a) $|f(x,y)|\le |x|\dfrac{y^2}{x^2+y^2+y^2}\le |x| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

$\Rightarrow f$ è continua. (b) $f'(0)(\vec v)=\lim_{t\to 0}\dfrac{1}{t}\dfrac{t v_x t^2 v_y^2}{t^2v_x^2+t^2v_y^2+t^4v_y^4}=$

$$\lim_{t\to 0}\frac{v_x v_y^2}{v_x^2+v_y^2+t^2v_y^2}=\frac{v_x v_y^2}{v_x^2+v_y^2} \leftarrow \text{ESISTE } \underline{\forall \vec v}$$

(a) dato che $f'(0)(\vec v)$ NON È LINEARE $\Rightarrow f$ NON È DIFFERENZIAB.

(c) $f'(1,1)=1/2$ (prendo $v_x=1, v_y=1$ e applico la formula sopra)

8. 2 punti

Si dica quale delle seguenti affermazoni è vera:

(a) $B \subsetneq \partial A$;

(b) $\partial A \subsetneq B$;

(c) $B = \partial A$;

(d) nessuna delle precedenti.

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)

Esercizio Due

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che

$$\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

9. 3 punti

Posto $\varphi(t) := f(t, t^2)$ si calcoli $\varphi'(1)$.

Esercizio Tre

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + y^4} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0) \qquad\qquad f(0,0) := 0.$$

10. 1 punto

Si dica se f è continua:

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

11. 1 punto

Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) $f'(0,0)(\vec{v})$ non esiste per nessun $\vec{v}$;

(b) $f'(0,0)(\vec{v})$ esiste per alcuni $\vec{v}$ ma non per tutti;

(c) $f'(0,0)(\vec{v})$ esiste per tutti i $\vec{v}$;

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- (c)

12. 1 punto

Si calcoli $f'(0,0)(1,1)$ oppure si scriva "non esiste":

13. 1 punto

Si dica se f è differenziabile in $(0,0)$:

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

14. 1 punto

Si motivi brevemente la risposta precedente:

Esercizio Quattro

15. 3 punti

Siano $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^N$ un punto di minimo relativo. Si dica quale delle seguenti proprietà è necessariamente vera:

1. $H_f(x_0) > 0$;
2. $H_f(x_0) \geq 0$;
3. $H_f(x) > 0$ per tutte le x vicine a x_0;
4. $H_f(x) \geq 0$ per tutte le x vicine a x_0;

& 1, 3, 4 sono condizioni sufficienti

Contrassegna solo un ovale.

- (1)
- X (2)
- (3)
- (4)
- nessuna delle precedenti

Esercizio Cinque

$$\sin(t) = t + o(t) \Rightarrow \sin(3xyz) = 3xyz + o(\|x,y,z\|^3)$$

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} \Rightarrow \cos(xy) = 1 - \frac{x^2y^2}{2} + o(\|x,y,z\|^4)$$

$$\Rightarrow z\cos(x,y) = z - \frac{x^2y^2z}{2} + o(\|x\,y\,z\|^5) \Rightarrow$$

$$P_{3,(0,0)}(x,y,z) = z + 3xyz \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 1 \quad \text{(NON SERVE)}$$

$$\frac{\partial^3 f(0,0,0)}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{1}{(1,1,1)!} D_{(1,1,1)} f(0) = 3 \Leftrightarrow \frac{\partial^3 f(0)}{\partial x \partial y \partial z} = 3$$

16. 3 punti

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x, y, z) := \sin(3xyz) + z\cos(xy).$$

Si calcoli la derivata:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(0, 0, 0).$$

Esercizio Sei

$$\ell = \int_0^L \sqrt{1+\sinh^2(x)}\,dx = \int_0^L \sqrt{\cosh^2(x)}\,dx = \int_0^L \cosh(x)\,dx$$
$$= \left[\sinh(x)\right]_0^L$$

17. 6 punti

Si calcoli la lunghezza del grafico della funzione:

$$f(x) = \cosh(x) \qquad \text{per } 0 \le x \le L$$

(in termini di $L > 0$).

$\sinh(L)$

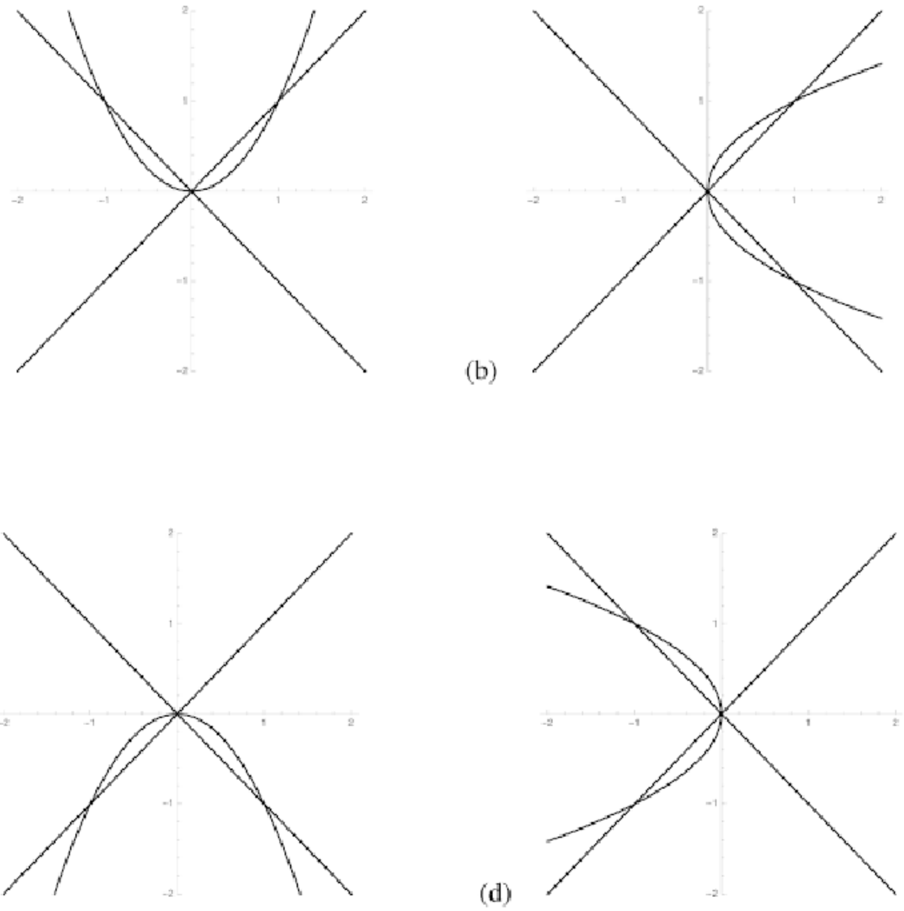
Esercizio Sette

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) := (x^2 - y^2)(y + x^2)$$

18. 2 punti

1. Si dica quale delle seguenti figure rappresenta l'insieme di livello $\{f(x,y)=0\}$:

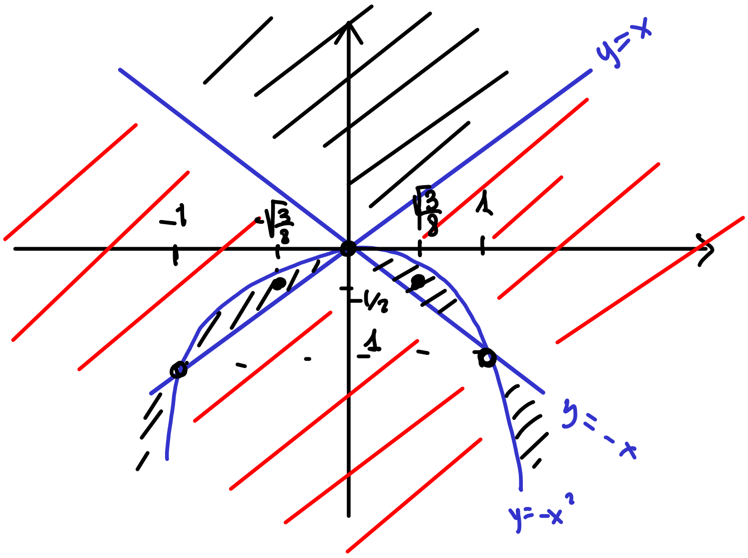


(a) (b) (c) (d)

(e) nessuna delle precedenti.

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- ~~(c)~~
- (d)
- (e)



NERO: $f<0$
BLU = $f=0$
ROSSO = $f>0$

$$f(x;y)=(x^2-y^2)(x^2+y)=x^4-x^2y^2+x^2y-y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3-2xy^2+2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-2x^2y+x^2-3y^2$$

PTI CRITICI

$$\begin{cases} 4x^3-2xy^2+2xy=0 \\ -2x^2y+x^2-3y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(2x^2-y^2+y)=0 \\ -2x^2y+x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

se $x=0$ la prima è OK $\Rightarrow$ dalla seconda $y=0$. Se $x\neq 0$ semplifico

$$\begin{cases} 2x^2-y^2+y=0 \\ -2x^2y+x^2-3y^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2=\frac{y^2-y}{2}=0 \\ -(y^2-y)y+\frac{y^2-y}{2}-3y^2=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x^2=\frac{y^2-y}{2}=0 \\ 2y^2-2y^3+y^2-y-6y^2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2=\frac{y^2-y}{2}=0 \\ 2y^3+3y^2+y=0 \end{cases}$$

se $y=0$ la seconda riga è OK $\Rightarrow x=0$. RITROVO $(0,0)$.

se $y\neq 0$ posso semplificare y:

$$\begin{cases} x^2=\frac{y^2-y}{2}=0 \\ 2y^2+3y+1=0 \end{cases} \longrightarrow y=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{-3\pm 1}{4}=\begin{cases} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

se $y=-1 \Rightarrow x^2=1 \iff x=\pm 1$

se $y=-\frac{1}{2} \Rightarrow x^2=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{8} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{8}}$

SE GUARDO LE LINEE DI LIVELLO VEDO CHE

- $(0,0)$ non è né max né min (e neanche una sella dato che in $(0,0)$ confluiscono TRE zone in cui $f<0$ e TRE ZONE IN CUI $f>0$. (Vedremo che $H_f(0,0)=0$)
- Vedo anche che $(\pm 1,-1)$ sono punti di SELLA (vi confluiscono DUE zone in cui $f<0$ e DUE ZONE IN CUI $f>0$)

comunque lo vedremo anche con l'Hessiano

- Si può anche vedere che $(\pm\sqrt{3/8}, -1/2)$ sono punti di minimo perché se $D =$ ZONA COMPRESA TRA LE DIAGONALI E la parabola (vedi la figura) si ha che $f < 0$ in $\mathring{D}$ e $f = 0$ su ∂D

Per Weierstrass. f ha minimo in D e i pti di minimo DEVONO ESSERE $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}, -1/2\right)$. Comunque lo vedremo con gli Hessiani!

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2xy^2 + 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2y + x^2 - 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2y^2 + 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x^2 - 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xy + 2x = 2x(1-2y) \qquad \text{Allora}$$

- $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ NON ME NE FACCIO NULLA

- $H_f(\pm 1, -1) = \begin{bmatrix} 12 - 2 - 2 & \pm 2(1+2) \\ \pm 2(1+2) & -2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & \pm 6 \\ \pm 6 & 4 \end{bmatrix}$ $\det = 32 - 36 < 0$ SELLE

- $H_f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 12 \cdot \frac{3}{8} - \frac{2}{4} - 1 & \pm\sqrt{\frac{3}{2}}(1+1) \\ \pm\sqrt{\frac{3}{2}}(1+1) & -\frac{3}{4} + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \pm 2\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \pm 2\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$

$$\det = \frac{27}{4} - \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{27 - 24}{4} = \frac{3}{4} > 0$$

PTI DI MINIMO

19. 8 punti

Si scrivano tutti i punti stazionari indicando per ognuno se si tratta di un minimo relativo (MIN), di un massimo relativo (MAX) o nessuno dei due (INDEF). È richiesto solo di fare una lista del tipo
(x_1, y_1) (MIN)
(x_2, y_2) (MIN)
(x_3, y_3) (MAX)
(x_4, y_4) (INDEF)

20. 2 punti

Si dica se f ha massimo su $\mathbb{R}^2$:

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

21. 2 punti

Si dica se f ha minimo su $\mathbb{R}^2$:

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No