Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 24 23/11/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

ESERCITAZIONE ONLINE

VENERDÌ 25 ore 11 – 13

SU TEAMS

PROBLEMA: DIFFERENZIABILITÀ DI f^{-1}
(e della esistenza di f^{-1})

IN UNA VARIABILE se $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ è C^1 e $f' \neq 0$
$\Rightarrow$ o $f' > 0$ o $f' < 0$ $\Rightarrow$ f è strettamente monotona
dunque $f(]a,b[) =]c,d[$, esiste $f^{-1}:]c,d[\to]a,b[$
e f^{-1} è C^1, $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ se $f(x) = y$

per esempio se $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) > 0$
$\Rightarrow$ esiste $f^{-1}(y)$ ($= \ln y$) def. su $y > 0 = f(]-\infty,+\infty[)$

e $\quad \frac{d}{dy}\ln(y) = \frac{1}{e^x} \quad \left(\text{dove } f(x) = y\right) = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$

IN PIÙ VARIABILI ABBIAMO DELLE funzioni $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ CI SONO BUONI MOTIVI PER RIDURSI AL CASO $\boxed{M = N}$ (se Ω è aperto è quasi inevitabile ...)

DUNQUE CONSIDERO $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ Ω aperto di $\mathbb{R}^N$

Mettiamo che f sia $C^1(\Omega)$, dunque $\forall x \in \Omega$ esiste la matrice Jacobiana $J_f(x)$, che è $N \times N$ (QUADRATA)

FAREMO L'IPOTESI $J_f(x)$ sia INVERTIBILE $\forall x \in \Omega$

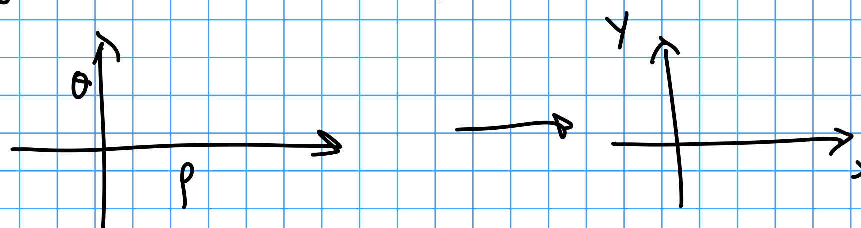
CIOÈ $\boxed{\det J_f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega}$

OSS. L'ipotesi fatta non implica che $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ sia iniettiva (a differenza del caso $N = 1$)

Per esempio posso considerare "il passaggio INVERSO in coordinate polari"

$$(x, y) \longleftrightarrow (\rho, \theta) \qquad x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta$$

$$f(\rho, \theta) := (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \qquad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$



$$J_f(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}\rho\cos\theta & \frac{\partial}{\partial\theta}\rho\cos\theta \\ \frac{\partial}{\partial\rho}\rho\sin\theta & \frac{\partial}{\partial\theta}\rho\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$\det J_f(\rho, \theta) = \rho \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \rho$$

Se dunque mi restringo a $\Omega = \{\rho > 0,\ \theta \in \mathbb{R}\}$ ho un aperto di $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2(\rho,\theta)$) su cui $\det J_f(\rho,\theta) > 0$

<u>PERÒ</u> f NON È INIETTIVA SU Ω perché

dato $\rho > 0$ $\theta \in \mathbb{R}$ $f(\rho,\theta) = f(\rho, \theta + 2\pi) = f(\rho, \theta + 2k\pi)$

NON È DETTO CHE $\det(J_f(x)) \neq 0\ \forall x \Rightarrow f$ iniettiva

QUELLO CHE SI PUÒ DIMOSTRARE È UN "RISULTATO LOCALE"

<u>TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE</u>

$f : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $f \in C^1(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ e so che $\det(J_f(x_0)) \neq 0$

ALLORA $\exists\, \rho > 0$ TALE CHE:

(1) f è iniettiva su $B(x_0,\rho) = \{\|x - x_0\| < \rho\}$

(2) $\Omega_1 := f(B(x_0,\rho))$ è aperto in $\mathbb{R}^N$

$(f(B(x_0,\rho)) = \{y \in \mathbb{R}^N : \exists\, x \in B(x_0,\rho)$ se $f(x) = y\})$

da (1) e (2) deduco che $\exists\, f^{-1} : \Omega_1 \to B(x_0,\rho)$

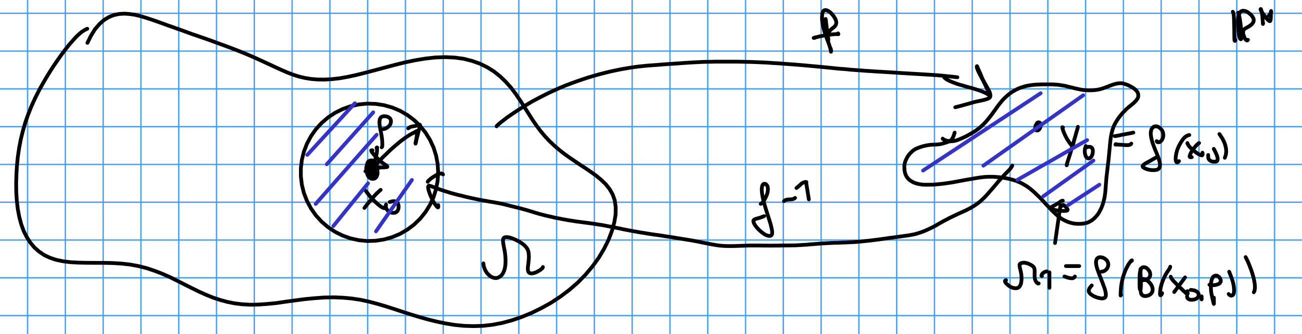
(più precisamente esiste l'inverso della restrizione di f a $B(x_0,\rho)$)

(3) f^{-1} è $C^1(\Omega_1)$ e si ha

$$J_{f^{-1}}(y) = J_f(x)^{-1} \quad \text{se } f(x) = y$$

CIOÈ

$$J_{f^{-1}}(y) = J_f(f^{-1}(y))^{-1} \qquad \forall y \in \Omega_1$$



(Ω_1 è un intorno di $y_0 = f(x_0)$)

Dim. (i) Posso trovare un raggio $\rho > 0$ tale che

$$\boxed{\| I - J_f(x_0)^{-1} J_f(x) \| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in B(x_0, \rho)}$$

($\| \cdot \|$ è la norma nelle matrici.)

Infatti la funzione $\Phi(x) = \underbrace{x}_{J = I_d} - \overbrace{J_f(x_0)^{-1}}^{\text{MATRICE FISSA}} f(x)$ CHE ESISTE PERCHÉ $J_f(x_0)$ È INVERTIBILE è C^1.

$J_\phi(x) = I - J_f(x_0)^{-1} J_f(x)$ ← CONTINUA IN x

$J_\phi(x_0) = I - J_f(x_0)^{-1} J_f(x_0) = I - I = 0$

(NON, SERVE INTRODURRE ϕ IN QUESTO PUNTO)

DUNQUE $\| I - J_f(x_0)^{-1} J_f(x) \|$ è continua e vale zero se $x = x_0$

PER LA PERMANENZA DEL SEGNO

$$\| I - J_f(x_0)^{-1} J_f(x) \| < \frac{1}{2} \quad \text{se} \quad \|x - x_0\| \text{ PICCOLO}$$

(ii) Definisco una mappa $\Phi : B(x_0, \rho) \to \mathbb{R}^N$ ponendo

$$\boxed{\Phi(x) = x - J_f(x_0)^{-1} f(x)}$$

Questa Φ è C^1 e la sua matrice Jacobiana è proprio

$$J_\phi(x) = I - J_f(x_0)^{-1} J_f(x)$$

$\Rightarrow$ SO CHE $\boxed{\| J_\phi(x) \| \le \frac{1}{2} \quad \forall x \in B(x_0, \rho)}$

(iii) Deduco da (ii) che

$$\boxed{\| \phi(x_2) - \phi(x_1) \| \leq \frac{1}{2} \| x_2 - x_1 \| \qquad \forall x \in B(x_0, \rho)}$$

Uso Taylor con resto di Lagrange su $B(x_0, \rho)$ (convesso):

$$\| \phi(x_2) - \phi(x_1) \| = \| J_\phi(\xi x_1 + (1-\xi) x_2)(x_2 - x_1) \| \leq$$

$$\left(\begin{array}{l} \xi \in]0,1[\\ \xi x_1 + (1-\xi) x_2 \text{ sul segmento tra } x_1 \text{ e } x_2 \end{array} \right)$$

$$\| J_\phi(\underbrace{\xi x_1 + (1-\xi) x_1}_{\in B(x_0, \rho)}) \| \, \| x_2 - x_1 \|_{\mathbb{R}^N} \leq \frac{1}{2} \| x_2 - x_1 \|$$

DUNQUE $\phi(x) = x - J_f(x_0)^{-1} f(x)$ è Lip. di coeff $1/2$ $(< 1 !)$