Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 23 22/11/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

AGGIUNTA a ieri.

Se x_0 è stazionario e $H_f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ pto di minimo
($H_f(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ pto di massimo)

CONDIZIONE <u>SUFFICIENTE</u> perché x_0 sia di min / max

Questa condizione NON È NECESSARIA ($f(x) = x^4 \Rightarrow f''(0) = 0$ e $x = 0$ è di minimo)

<u>FATTO</u> (condizione NECESSARIA)

Se f è $C^2(\Omega)$ $x_0 \in \Omega$ è punto di massimo / minimo relativo $\Rightarrow$ $\nabla f(x_0) = 0$ (Fermat, lo sapevo ...) e

$$H_f(x_0) \leq 0 \quad / \quad H_f(x_0) \geq 0$$

<u>NON LO DIMOSTRO</u>

che non sia sufficiente si vede prendendo $f(x) = x^3$
$\Rightarrow f''(0) = 0 \; (\geq 0)$ ma $x = 0$ non è né max né min.

ESERCIZIO

$$f(x,y) = e^{2-xy} + 4x^2 - 3xy + y^2$$

$\Omega = \mathbb{R}^2$ $\quad f$ è C^∞ (si può derivare un numero arbitrario di volte)

Cerchiamo i punti stazionari

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y e^{2-xy} + 8x - 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x e^{2-xy} - 3x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 (e^{2-xy}) + 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = xy e^{2-xy} - e^{2-xy} - 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{2-xy} + 2$$

$$\begin{cases} 8x - (3 + e^{2-xy}) y = 0 \\ -x(\underbrace{3 + e^{2-xy}}_{=4}) + 2y = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{2} x (3 + e^{2-xy})$$

$$\Rightarrow \quad 8x = (3 + e^{2-xy}) y = \frac{1}{2} x (3 + e^{2-xy})(3 + e^{2-xy})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 16 = (3 + e^{2-xy})^2 \end{cases} \Leftrightarrow 3 + e^{2-xy} = \pm 4 \Leftrightarrow 3 + e^{2-xy} = 4$$

$$\Leftrightarrow e^{2-xy} = 1 \Leftrightarrow 2 - xy = 0 \Leftrightarrow xy = 2$$

se $x=0$, il sistema mi dà $y=0$ $\Rightarrow (0,0)$

se $xy = 2$

$$\begin{cases} y = 2x \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

ottengo $\pm(1,2)$ $\quad ((1,2)$ e $(-1,-2))$

$$\boxed{\text{TRE PUNTI CRITICI} \quad (0,0) \quad (1,2) \quad (-1,-2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 (e^{2-xy}) + 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = xy\, e^{2-xy} - e^{2-xy} - 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{2-xy} + 2$$

$-e^2 - 3 = -(e^2+3)$

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 8 & -(3+e^2) \\ -(3+e^2) & 2 \end{bmatrix}$$

$a_{11} > 0$

$\det H_f(0,0) = 16 - (3+e^2)^2 =$

$16 - (9 + e^4 + 6e^2) < 0$

(Basta notare che $3+e^2 > 4$)

$\boxed{(0,0) \text{ pto di sella}}$

$(1,2)$ $\quad$ ($-(1,2)$ ha la stessa natura dato che $f(-x,-y) = f(x,y)$)

$$H_f(1,2) = \begin{bmatrix} 4+8 & 2-1-3 \\ 2-1-3 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 12 > 0$

$\det = 36 - 4 > 0$

$\boxed{(1,2) \text{ è pto di minimo (relativo!)}}$

Stesso discorso per $(-1,2)$. Se rifaccio i calcoli ho la stessa Hessiana — OPPURE SFRUTTO LA SIMMETRIA

<u>PROBLEMA</u> f ha max / min <u>assoluti</u>

- IL MASSIMO <u>NON ESISTE</u> perché se ci fosse un pto di massimo dovrebbe essere stazionario $\Rightarrow$ dovrebbe essere tra quelli trovati sopra. MA NESSUNO DI QUESTI VA BENE

POSSO ANCHE VEDERE DIRETTAMENTE che

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = +\infty$$ dato che

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y\to\infty}} e^{2-xy} + 4x^2 - 3xy + y^2 = \lim_{y\to\infty} e^2 + y^2 = +\infty$$

oppure $\lim_{\substack{y=0 \\ x\to\infty}} f(x,y) = \lim_{x\to\infty} e^2 + 4x^2 = +\infty$

(TUTTI METODI ALTERNATIVI DI VEDERE CHE f NON HA MASSIMO)

- f HA MINIMO ??

Notiamo che $f(x,y) \geq \underbrace{4x^2 - 3xy + y^2}_{}$ (butto via l'esponenziale)

FORMA QUADRATICA ASSOCIATA ALLA MATRICE $\begin{bmatrix} 4 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix}$ ← $a_{11} = 4 > 0$, $\det = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4} > 0$

Vedo che $\phi(x,y) = 4x^2 - 3xy + y^2$ è > 0

dunque esiste $\nu > 0$: $\phi(x,y) \geq \nu \|(x,y)\|^2$

(si può vedere che ν = minimo autovalore)

$\Rightarrow f(x,y) \geq \nu \|(x,y)\|^2 \Rightarrow \lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y) = +\infty$

$\Rightarrow$ (WEIERSTRASS GENERALIZZATO) $\exists$ minimo di f su $\mathbb{R}^2$

Allora il punto di minimo è uno dei pti stazionari trovati prima. DEVE ESSERE:

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = f(1,2) = f(-1,-2) = 1+4-6+4 = 3$$

($\pm(1,2)$ sono i punti di minimo) ($f(x,y) = e^{2-xy} + 4x^2 - 3xy + y^2$)

(N.B. $f(0,0) = e^2 > 3 \iff e > \sqrt{3}$)

$$4x^2 - 3xy + y^2 = \frac{7}{4}x^2 + \left(\frac{3}{2}x + y\right)^2 \;??$$

Analisi 2. Primo Compitino. 21.11.2020

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**null**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.
*Campo obbligatorio

1. Email *

2. Cognome *

Istruzioni di compilazione: Si usi:
- lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;
- il carattere `^` per indicare la potenza: `2^3` per 2^3;
- il carattere `_` per indicare l'indice: `a_n` per a_n;
- `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;
- `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;
- `Pi` per π;
- le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;
- le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;
- per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

3. Nome *

4. Matricola *

5. Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

Domanda 1

Sia $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ definita da $f(x,y):=2(1+2x+y)e^{1+2xy}$. Consideriamo il polinomio di grado tre per f nel punto $P_0=(-1,1)$; Questo polinomio si può scrivere:

$$P_{4,P_0}(x,y)=c_{0,0}+c_{1,0}(x+1)+c_{0,1}(y-1)+c_{2,0}(x+1)^2+c_{1,1}(x+1)(y-1)+c_{0,2}(y-1)^2+ \\ c_{3,0}(x+1)^3+c_{2,1}(x+1)^2(y-1)+c_{1,2}(x+1)(y-1)^2+c_{0,3}(y-1)^3$$

6. 1 punto

Si trovi $c_{1,1}$

7. 1 punto

Si trovi $c_{2,1}$

8. 1 punto

Si trovi $c_{1,2}$

9. Si trovi inoltre (2p.) 1 punto

Si trovi $\frac{\partial^3 f(-1,1)}{\partial x^3}$

10. Si trovi inoltre (2p.) 1 punto

Si trovi $\frac{\partial^3 f(-1,1)}{\partial x \partial y^2}$

Domanda 2

Sia $f = (f_1, f_2) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una funzione differenziabile tali che

$$f(0,0) = (-1,2) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = 3, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = 2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) = -2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) = 5,$$

Sia inoltre $h(x,y)$ definita da $h(x,y) := f_1(x,y)^2 - f_2(x,y)^2$.

$f_1(0,0) = -1 \qquad f_2(0,0) = 2$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_1^2(x,y) - f_2^2(x,y)\right) =$$

$$2 f_1(x,y) \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) - 2 f_2(x,y) \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$

$$(x,y) = (0,0) \to 2(-1)\,3 - 2(2)(-2) = -6+8 = 2$$

11. 2 punti

Si trovi $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)$=

2

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2 f_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} - 2 f_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$\text{in } (0,0) \to 2(-1)\,2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 = -4 - 20 = -24$$

12. 2 punti

Si trovi $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0)$.

-24

$h = g \circ f$ dove $g(\xi, \eta) = \xi^2 - \eta^2$

$J_h = J_g(f)\, J_f$

$J_g(\xi,\eta) = [2\xi, -2\eta] \Rightarrow$

$J_g(f(0,0)) = J_g(-1,2) = [-2, -4]$

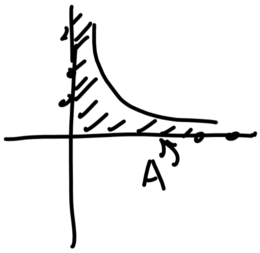
Domanda 3

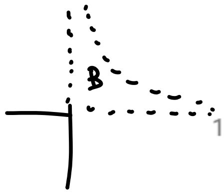
$$J_h = [-2, -4] \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = [-2\cdot 3 + (-4)(-2), \; -2\cdot 2 + (-4)\cdot 5] = [2, -24]$$

Siano:

$$A := \{(x,y) : 0 \leq xy \leq 1, 0 \leq x\} \quad , \quad B := \{(x,y) : 0 < xy < 1, 0 \leq x\}.$$

Allora (1p. a risposta):





13. A è limitato — 1 punto

Contrassegna solo un ovale.

- [ ] SI'
- [x] No

$(0,y) \in A \ \forall y \geq 0$

$(x,0) \in A \ \forall x \geq 0$

$\Downarrow$

ILLIMITATI

se f è continua $\Rightarrow$ $\{f \leq c\}$ è chiuso

$\{f \geq c\}$ è chiuso

$\{f = c\}$ è chiuso

14. A è chiuso — 1 punto

Contrassegna solo un ovale.

- [x] SI'
- [ ] No

$A = \{xy \geq 0\} \cap \{xy \leq 1\} \cap \{x \geq 0\}$

INTERSEZIONE DI CHIUSI È CHIUSO

15. B è aperto — 1 punto

Contrassegna solo un ovale.

- [x] SI'
- [ ] No

$B = \{ 0 < xy < 1 \quad x > 0 \}$

/ se $x = 0$ xy non può essere > 0 DUNQUE $(0,y) \notin B \ \forall y$

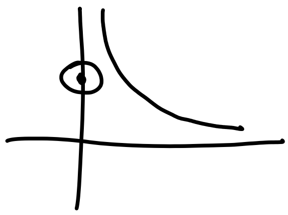
$B = \{0 < xy\} \cap \{xy < 1\} \cap \{x > 0\}$

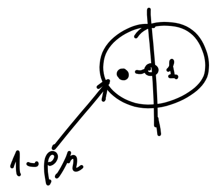
INTERSEZIONE DI APERTI È APERTO

16. Il punto (0,1) è — 1 punto

Contrassegna solo un ovale.

- [ ] interno ad A
- [ ] esterno ad A
- [x] di frontiera per A





$(0,1) \in A$

se $\rho > 0$ possoprendere $(0, 1-\rho/2) \notin A$

e però $(0, 1-\rho/2) \in B((0,1),\rho)$

Domanda 4

Domanda 4 (4p.)

Consideriamo una matrice 4×4 A e le sue sottomatrici A_1, A_2 e A_3 come segue:

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} \end{pmatrix} \;,\; A_3 := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix} \;,\; A_2 := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \;,\; A_1 := (a_{1,1})$$

Con queste notazioni si scriva cosa chiede il criterio di Sylvester per avere che (a) A è definita strettamente positiva; (b) A è definita strettamente negativa.

17. Criterio (a) — 2 punti

$A > 0$ $\quad \det A > 0$, $\det A_3 > 0$, $\det A_1 > 0$ $\quad a_{11} > 0$

18. Criterio (b) — 2 punti

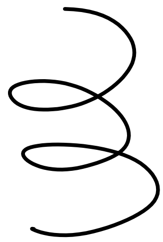
$A < 0$ $\quad \det A > 0$ $\det A_3 < 0$ $\det A_2 > 0$ $\quad a_{11} < 0$

Domanda 5

Si risponda alla seguente domanda (4p.)

Sia $\gamma : [0, \pi] \to \mathbf{R}^3$ definita da:

$$\gamma(t) = (\sin(t), \cos(t), -2t) = \sin(t)\vec{\mathbf{i}} + \cos(t)\vec{\mathbf{j}} - 2t\vec{\mathbf{k}}.$$



Allora:

19. 1 punto

γ è una curva chiusa

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- [X] No

(la terza componente è strettamente crescente)

$\gamma(0) \neq \gamma(\pi)$

$\gamma(0) = (0, 1, 0) \quad \gamma(\pi) = (0, -1, -2\pi)$

20. 1 punto

$\gamma'(t)$ ha modulo costante

Contrassegna solo un ovale.

- [X] Sì
- No

$\gamma'(t) = (\cos(t), -\sin(t), -2)$

$\|\gamma'(t)\|^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) + 4 = 5$

$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{5} \quad \forall t$

21. 1 punto

$\gamma(t)$ è ortogonale a $\gamma'(t)$ ← (solo se $t=0$)

$\gamma'(t) \cdot \gamma(t) = 0 + -2t \cdot -2 = 4t \neq 0$

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- [X] No

22. 2 punti

Si trovi la lunghezza di γ: $\ell(\gamma) =$

$\sqrt{3}\,\pi$

$\pi\sqrt{5} \left(= \int_0^\pi \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^\pi \sqrt{5}\, dt \right)$

Domanda 6

Sia $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una forma quadratica. Indichiamo:

$$B := \{x \in \mathbb{R}^N \,:\, \|x\| \leq 1\} \qquad , \qquad S := \{x \in \mathbb{R}^N \,:\, \|x\| = 1\}.$$

Allora:

23. 1 punto

$$\varphi \text{ è definita strettamente positiva se e solo se } \min_{x \in S} \varphi(x) > 0$$

Contrassegna solo un ovale.

- [x] Vero
- [ ] Falso

$\left(\varphi(x) \geq \left(\min_S \varphi\right) \|x\|^2 \quad \forall x \right)$

Dunque (1) se $\varphi(x) > 0$ per $x \neq 0 \Rightarrow \min_S \varphi > 0$

(2) viceversa se $\min_S \varphi > 0$ per la dis. sopra $\varphi(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

24. 1 punto

$$\varphi \text{ è definita strettamente positiva se e solo se } \min_{x \in B} \varphi(x) > 0$$

Contrassegna solo un ovale.

- [ ] Vero
- [x] Falso

NOTO CHE È IMPOSSIBILE CHE $\min_B \varphi > 0$ dato che $\varphi(0) = 0$ (IN OGNI CASO $\min_B \varphi \leq 0$)

25. 1 punto

$$\varphi \text{ è } \underbrace{\text{definita positiva}}_{\varphi \geq 0} \text{ se e solo se } \min_{x \in S} \varphi(x) \geq 0$$

DECIDO CHE INTENDO $\varphi \geq 0$

Contrassegna solo un ovale.

- [x] Vero
- [ ] Falso

. Se $\varphi(x) \geq 0 \Rightarrow \min_S \varphi \geq 0$

. Se $\min_S \varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq \min_S \varphi \, \|x\|^2 \geq 0$

$\left(\forall x \quad \varphi(x) = \|x\|^2 \varphi(\hat{x}) \quad \text{dove } \hat{x} = \frac{x}{\|x\|} \right)$

26.

1 punto

φ è definita strettamente positiva se e solo se $\min_{x \in B} \varphi(x) \geq 0$

Contrassegna solo un ovale.

- [ ] Vero
- [x] Falso

se $\varphi(x) = 0 \Rightarrow \min_B \varphi = 0 \geq 0$ ma φ NON è > 0

(da $\min_B \varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi$ è semidefinito ≥ 0)
$\Downarrow$ $\Uparrow$
$\min_S \varphi \geq 0$

Domanda 7

Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := -9x^3 + y^4 + 24xy$.

27.

2 punti

(A) Si dica quanti punti stazionari ha f

VEDI SOTTO

28.

1 punto

(B) Si dica quanti sono, tra i punti critici, quelli di massimo relativo

29.

1 punto

(C) Si dica quanti sono, tra i punti critici, quelli di minimo relativo

30. 1 punto

(D) Si dica quanti sono, tra i punti critici, quelli di sella

31. 1 punto

(E) Si dica se f ha massimo su $\mathbb{R}^2$

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

32. 1 punto

(F) Si dica se f ha minimo su $\mathbb{R}^2$

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No

33. Si motivino le due risposte precedenti, indicando eventualmente quali risultati teorici sono stati utilizzati (senza mettere i calcoli). Nel caso in cui esistano si scrivano il valore massimo e il valore minimo di f (2p.) 2 punti

Domanda 8

Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{5x^2+3y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$x^2y^2 = x(xy^2) \le x\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{2}\right)$$

34. Si dica se f è continua — 1 punto

$x \ge 0$ ANCHE

Contrassegna solo un ovale.

- (X) Sì
- ( ) No

$$0 \le \frac{x^2y^2}{5x^2+3y^4} \le \frac{x^2(y^4)^{1/2}}{x^2+y^4} \le \frac{(x^2+y^4)(x^2+y^4)^{1/2}}{x^2+y^4}$$

più semplicemente $\frac{x^2}{5x^2+3y^4} \le \frac{1}{5} \Rightarrow 0 \le f(x,y) \le \frac{1}{5}y^2$ che tende a zero

35. Si dica qual è la risposta corretta riguardo l'esistenza delle derivate direzionali f'(0,0)(v) — 1 punto

Contrassegna solo un ovale.

$\vec{v} \neq (0,0)$

$$f'(0,0)(v_x, v_y) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{t^4 v_x^2 v_y^2}{t^2(5v_x^2+3t^2v_x^4)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t\, v_x^2 v_y^2}{5v_x^2+3t^2v_y^4} = \begin{cases} 0 & v_x \neq 0 \\ 0 & v_x = 0 \end{cases}$$

(TROVO ZERO $\forall t$)

- ( ) non esiste per nessun vettore v
- ( ) esiste per alcuni v ma non per tutti
- ( ) esiste per tutti i vettori v, ma non è lineare in v
- (X) esiste per tutti i vettori v ed è lineare in v

$$f'(0,0)(v_x, v_y) = 0 \quad \forall (v_x, v_y)$$

36. Si dica se f è differenziabile in (0,0) e si spieghi come si è giunti alla conclusione, indicando i passaggi ma senza riportare i calcoli. — 3 punti

Dato che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ per la differenziabilità devo dimostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \overset{=0}{f(0,0)} - \overset{=0}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}}{\|(x,y)\|} = 0$$

cioè

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{1/2}(5x^2+3y^4)} = 0$$

IN EFFETTI $0 \le \dfrac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^{1/2}(5x^2+3y^4)} \le \dfrac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^{1/2}(x^2+y^4)} =$

$$\underbrace{\frac{x^2}{(x^2+y^4)}}_{\le 1} \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{1/2}} \le \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}|y| \le |y|$$

DUNQUE quel limite fa zero $\Rightarrow$ f è diff.

(a posteriori dovevo venire $f'(0,0)\vec{v} = 0 \quad \forall \vec{v}$)

$$f(x,y) = -9x^3 + y^4 + 24xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -27x^2 + 24y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 24x$$

$$\begin{cases} 8y = 9x^2 \\ y^3 = -6x \end{cases} \qquad y = \frac{9}{8}x^2 = \frac{9}{8}\left(-\frac{1}{6}y^3\right)^2 = \frac{9}{36\cdot 8}y^6$$

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{y=0}$ oppure $32 = y^5$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{y=2}$

$y=0 \to x=0$ $\qquad$ $y=2 \to x = -\frac{1}{6}8 = -\frac{4}{3}$

DUE PTI CRITICI $(0,0)$ $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -54x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 24 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$$

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 24 \\ 24 & 0 \end{bmatrix}$$ det <0 $\Rightarrow$ $(0,0)$ SELLA

$$H_f\left(-\frac{4}{3}, 2\right) = \begin{bmatrix} \frac{54\cdot 4}{3} & 24 \\ 24 & 12\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 & 24 \\ 24 & 48 \end{bmatrix}$$ $a_{11} > 0$, det >0

$\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$ pto di minimo

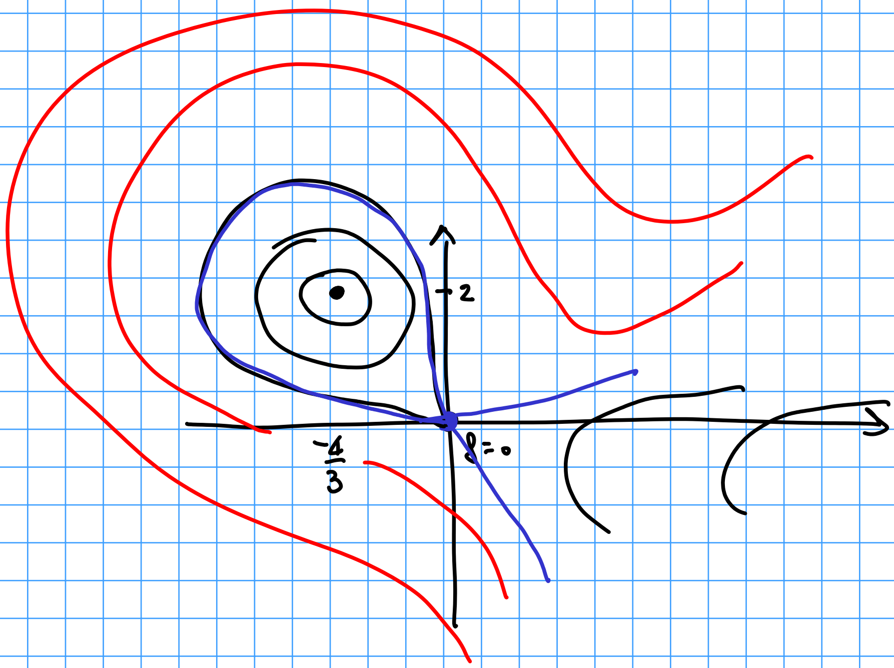
– f NON HA MAX (. – –)

– . . . . . .

$$f(x,y) = -9x^3 + y^4 + 24xy$$ se mi metto sui pti con $y=0$

$f(x,0) = -9x^3$ $\nearrow +\infty$ se $x \to -\infty$, $\searrow -\infty$ se $x \to +\infty$

NON HA NEANCHE MINIMO



$f=0$

$f>0$

$f<0$

$$f\left(-\frac{4}{3},2\right) = -9\left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 2^4 - 24\cdot\frac{4}{3}\cdot 2$$

$$= \frac{4^3}{3} + 16 - 8\cdot 8$$

$$\frac{64}{3} + 16 - 64 < 0$$