Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 22 21/11/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

PTI DI MAX MIN (ASS. o RELATIVI) di una $f: \Omega \to \mathbb{R}$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto

Def. Dico che $x_0 \in \Omega$ è punto di massimo / minimo relativo per f se esiste $\rho > 0$ tale che

$$\forall x \in B(x_0, \rho) \cap \Omega \implies f(x) \leq f(x_0) \;/\; f(x) \geq f(x_0)$$

IN QUESTO CASO $f(x_0)$ si dice massimo / minimo relativo.

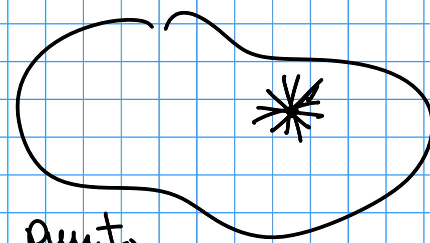
Se $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in \Omega$ $\left(f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in \Omega \right)$ $\implies$ x_0 è pto di max (min) assoluto / min e $f(x_0)$ è il massimo (minimo) ass.

TEOREMA (di Fermat) Se $x_0 \in \Omega$ in cui esiste $\nabla f(x_0)$ e se x_0 è pto di max / min relativo

$$\implies \nabla f(x_0) = 0$$

Dim. Fisso un vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$, considero $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v})$, Dato che x_0 è di max / min vicino a x_0 $\Rightarrow$ $t=0$ è di max / min per φ. Usando Fermat di Analisi 1 $\Rightarrow$ $\varphi'(0)$ cioè $f'(x_0)(\vec{v})=0$ $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$

$\iff$ $\nabla f(x_0)=0$



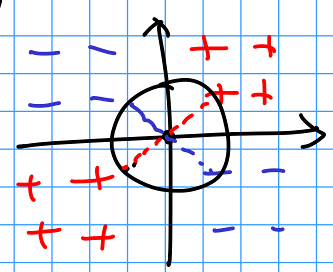
Def. Chiamo punto critico oppure punto stazionario un pto x_0 in cui ($\exists$) $\nabla f(x_0)=0$

Fermat: se x_0 è di max / min per f $\Rightarrow$ x_0 è stazionario per f

Il viceversa è falso (già in una variabile).

ESEMPIO (sella) $f(x,y) = xy$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \qquad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$



$\Rightarrow$ $(0,0)$ è un punto stazionario.

Però se prendo $\rho>0$ e guardo in

$B(0,\rho)=\{x^2+y^2<\rho^2\}$

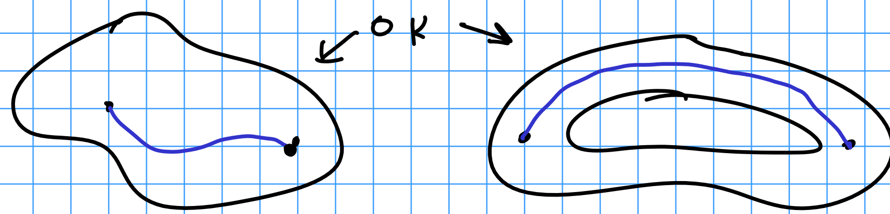
trovo punti in cui $f>0$ e punti in cui $f<0$

$(f(x,x)= x^2>0$, $f(x,-x)=-x^2<0$

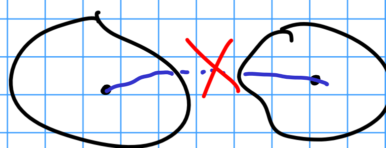
OSS. Se mi metto sulla retta $y=x$ vedo che $(0,0)$ è di minimo, se mi metto su $y=-y$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ è di max.

$(0,0) \leftarrow$ PUNTO DI SELLA

Def. Dico che Ω è connesso (per archi ...) se per ogni coppia di punti $x_0, x_1 \in \Omega$ esiste una curva C^1 a tratti $\gamma : [0,1] \to \Omega$ con $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ (γ congiunge x_0 e x_1)



No



f è C^1

TEOREMA (a) Se f è costante $\Rightarrow$ $\nabla f(x) = 0$ $\forall x \in \Omega$

(b) se $\nabla f(x) = 0$ $\forall x \in \Omega$ e se Ω è CONNESSO $\Rightarrow$ f è costante

Dim. (a) è ovvio. (b) FISSO $x_0 \in \Omega$ e dimostro che

$$f(x) = f(x_0) \quad \forall x \in \Omega.$$

So che esiste $\gamma : [0,1] \to \Omega$ C^1 a tratti con $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x$

Supponiamo γ sia C^1.

Considero $\varphi(t) = f(\gamma(t))$ $\qquad \varphi(0) = f(x_0)$ $\quad \varphi(1) = f(x)$

$$\varphi'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$ (FORMULA VISTA!!)

MA se $\nabla f \equiv 0$ $\Rightarrow$ $\varphi'(t) = 0$ $\forall t$ $\Rightarrow$ φ è costante $\Rightarrow$

$$f(x_0) = \varphi(0) = \varphi(1) = f(x)$$ *

Se γ è C^1 a tratti so che ci sono $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ e applico il ragionamento sopra su ogni $[t_{i-1}, t_i]$

TORNIAMO ai pti di max / min loc per $f: \Omega \to \mathbb{R}$

<u>TEOREMA</u> (classificazione dei pti stazionari - cond suff. di "estremalità")

MI SERVE LA DERIVATA SECONDA.

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ di classe $C^2(\Omega)$. $x_0 \in \Omega$. $\nabla f(x_0) = 0$

(a) Se $H_f(x_0) > 0$ (DEFINITO POSITIVO) $\Rightarrow$

x_0 è punto di minimo

(b) Se $H_f(x_0) < 0$ (DEFINITO NEGATIVO) $\Rightarrow$

x_0 è punto di massimo

$H_f(x)$ E' INDEFINITA

(c) se $\det H_f \neq 0$ (H_f non è singolare, H_f è invertibile)

ma esistono P e Q con $H_f(P)\cdot P > 0$ $H_f(Q)\cdot Q < 0$

(H_f ha tutti autovalori $\neq 0$, ma ha due autovalori di segno opposto)

$\Rightarrow$ <u>x_0 è punto di sella</u> (PER DEFINIZIONE)

(x_0 stazionario e $H_f(x_0)$ INDEFINITA)

<u>DIM</u> Caso del minimo (a)

<u>OSS.</u> Se una matrice A è definita positiva $\Rightarrow$

$$\min_{x \in S} (Ax)\cdot x = \nu > 0 \qquad S = \{\|x\| = 1\}$$

INFATTI. (1) questo minimo esiste per Weierstrass dato che $\Phi(x) := (Ax)\cdot x$ è continua, (2) S è limitato e chiuso

$\Rightarrow$ esiste $\hat{x}$ con $\nu := \min_{x \in S} (Ax)x = (A\hat{x})\cdot\hat{x} > 0$ $(\hat{x} \neq 0)$

NE SEGUE (per omogeneità) che

$$(Ax)\cdot x \geq \nu \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \qquad (\nu > 0 \;!!)$$

Prendiamo allora x_0 con $\nabla f(x_0)=0$ e $Hf(x_0) > 0$

Scriviamo la formula di Taylor di ordine 2 con resto di Peano:

$$f(x) = \underbrace{\underset{|\alpha|=0}{f(x_0)} + \underset{|\alpha|=1}{\nabla f(x_0)\cdot(x-x_0)} + \frac{1}{2} Hf(x)(x-x_0)^2 + R(x,x_0)}$$

dove $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{\|R(x,x_0)\|}{\|x-x_0\|^2} = 0$

$$\Big(\; f(x) = \sum_{|\alpha|\leq 2} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha = \underset{|\alpha|=1}{f(x)} + \underset{|\alpha|=1}{\sum_{i=1}^{N}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x-x_0)_i$$

$$N \begin{cases} (1 \;..\; 0 \;..) \\ (0, 1 \;...\; 0 \\ (\;.\;.\;.\; 1 \;\; 0) \end{cases}$$

I MULTIINDICI di lunghezza 2 sono di due tipi:

$(2, 0 .. 0) \quad (0, 2, 0 0 0) \; ... \; (0 \;\; 0 \;\; 2) \leftarrow \alpha! = 2$

$(1, 1 \; ...) \quad (1 \; 0, \cdot\cdot 1) \;..\; (0 \; 1 \cdot\cdot 1 \cdot\cdot 0) \leftarrow \alpha! = 1$

$$\sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)(x-x_0)_i^2 +$$

$$\sum_{1\leq i<j\leq N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)(x-x_0)_i (x-x_0)_j$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{2} Hf(x_0)(x-x_0)}$$

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2} Hf(x)(x-x_0)^2 + R(x,x_0)$$

dove $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{\|R(x,x_0)\|}{\|x-x_0\|^2} = 0$

Dato che $\nabla f(x_0)=0$ posso scrivere

$$f(x)-f(x_0) = \frac{1}{2} H_f(x_0)(x-x_0)^2 + R(x,x_0) \geq \quad \text{(per l'osservazione)}$$

$$\frac{1}{2} \nu \|x-x_0\|^2 + R(x,x_0) =$$

$$\underbrace{\|x-x_0\|^2 \left(\frac{\nu}{2} + \frac{R(x,x_0)}{\|x-x_0\|^2} \right)}$$

So che $\frac{R(x,x_0)}{\|x-x_0\|^2} \to 0$. Dunque trovo $\rho>0$ tale che

$\forall x \in B(x_0,\rho)$ $\quad \frac{|R(x,x_0)|}{\|x-x_0\|^2} < \frac{\nu}{4}$ e allora

se $x \in B(x_0,\rho)$ $\quad \left(\frac{R(x,x_0)}{\|x-x_0\|^2} > -\frac{\nu}{4} \right)$

$$f(x)-f(x_0) \geq \|x-x_0\|^2 \left(\frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{4} \right) = \|x-x_0\|^2 \frac{\nu}{4} > 0 \quad (\text{se } x \neq x_0)$$

DUNQUE $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in B(x_0,\rho)$ $x \neq x_0$

x_0 è pto di minimo

LASCIAMO IL RESTO DELLA DIM.

OSS. Se $H_f(x_0) \geq 0$ non è detto che x_0 sia di minimo

per esempio $-x^4 - y^4$ ho $H_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ma in $(0,0)$ c'è un massimo

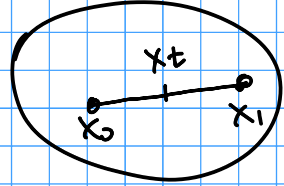
ATTENZIONE: IL CRITERIO VALE se $\nabla f(x_0)=0$

CONVESSITÀ

Def. $C \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme CONVESSO se

$\forall x_0, x_1 \in C$ e $\forall t \in [0,1]$ il punto

$\underbrace{(1-t)x_0 + t x_1}_{x_t}$ $(= x_0 + t(x_1 - x_0))$ è contenuto in C



x_t si dice "combinazione convessa" di x_0 e x_1. $\gamma(t) = (1-t)x_0 + t\,x_1$ è una curva che congiunge x_0 e x_1 che ha come sostegno il "segmento tra i due punti"

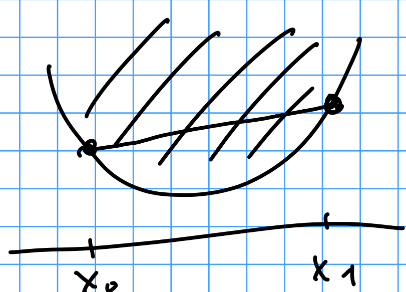
Def. Se C è convesso, $f: C \to \mathbb{R}$. Dico che f è CONVESSA se

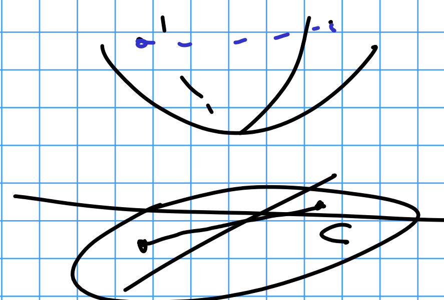
$\forall\, x_0, x_1 \in C \quad \forall\, t \in [0,1]$ posto $x_t = (1-t)x_0 + t\,x_1$

$$f(x_t) \leq (1-t) f(x_0) + t\, f(x_1)$$

(CORRISPONDE A DIRE CHE IL "SOPRA GRAFICO"

$\{(x,y) : x \in C \quad y \geq f(x)\}$ è convesso in $\mathbb{R}^{N+1}$





TEOREMA Supponiamo Ω aperto convesso e $f: \Omega \to \mathbb{R}$

(1) Se f è convessa $\Rightarrow$ f è continua in Ω

(2) Se f è $C^1(\Omega)$ allora sono equivalenti le tre prop.

(a) f è convessa

(b) $f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \qquad \forall\, x, x_0 \in \Omega$

(il grafico di f è sempre sopra il grafico del piano tangente)

(c) ("∇f è monotono")

$\forall x_1, x_2 \in \Omega$ si ha $(\nabla f(x_1) - \nabla f(x_2)) \cdot (x_1 - x_2) \geq 0$

(in una variabile vuol dire f' crescente $0 \leq (f'(x_1) - f'(x_2))(x_1 - x_2)$)

(3) se f è C^2 allora

$$f \text{ convessa} \iff Hf(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$$

(NO DIM.)

ESEMPIO $\quad f(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2$

vediamo se f è convessa. Dato che f è C^2 basta vedere se l'Hessiana è ≥ 0.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$A = Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ primo Sylvester}$$

vedo che $\quad a_{11} = 6 > 0 \qquad \det A = 6 \cdot 2 - 2\,2 = 12 - 4 = 8 > 0$

DEFINITA $> 0 \quad \Rightarrow \quad A \geq 0 \Rightarrow f$ è convessa

OSS. se f è convessa allora

$\nabla f(x_0) = 0 \iff x_0$ è punto di minimo. INFATTI

$$f(x) \geq f(x_0) + \overbrace{\nabla f(x_0)(x - x_0)}^{=0} = f(x_0)$$

DUNQUE se $\nabla f(x_0) = 0$ e $Hf(x) \geq 0$ in $B(x_0, \rho)$ IN TUTTE LE x DI $B(x_0,\rho)$

$\Rightarrow \quad f$ ha minimo in x_0 (in $B(x_0, \rho)$)

ESEMPIO $f(x,y) = 4x^3 + 3y^4 - 12xy$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(\Omega = \mathbb{R}^2)$ f è $C^1 / C^2 / C^k\ \forall k$

CERCHIAMO GLI EVENTUALI PTI DI MAX / MIN del.

$\Rightarrow$ DEVO CERCARE I PTI STAZIONARI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 - 12y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 12y^3 - 12x$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^3 = x \end{cases} \Rightarrow y = x^2 = y^6 \Rightarrow y = y^6 \begin{cases} y = 0 \\ 1 = y^5 \\ y = 1 \end{cases}$$

IL SISTEMA SI DIVIDE IN DUE CASI $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ 1^3 = x \end{cases}$

DUE PTI CRITICI $(0,0)$ $(1,1)$

VEDIAMO CHE RAZZA DI PTI SONO... CALCOLO LE DER. SECONDE

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 36y^2$$

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$$ ha det. < 0 $\Rightarrow$ $(0,0)$ SELLA

(ha due autovalori λ_1, λ_2 : $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det < 0$)

SIAMO IN DIMENSIONE $N=2$

$$(A =)\ H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 36 \end{bmatrix} \qquad a_{11} = 24 > 0 \quad \det A = 24 \cdot 36 - 12 \cdot 12 > 0$$

$\Rightarrow$ $(1,1)$ è pto di minimo relativo

DUNQUE f NON HA MASSIMO

(lo vedevo anche notando che $f(x,y) = 4x^3 + 3y^4 - 12xy$ viene calcolato in $(0,y)$ $\rightarrow$ $f(0,y) = 3y^4$ che va a $+\infty$

quando $y \to +\infty$) $\Rightarrow \sup f = +\infty$

CI SI PUÒ CHIEDERE SE f ha minimo

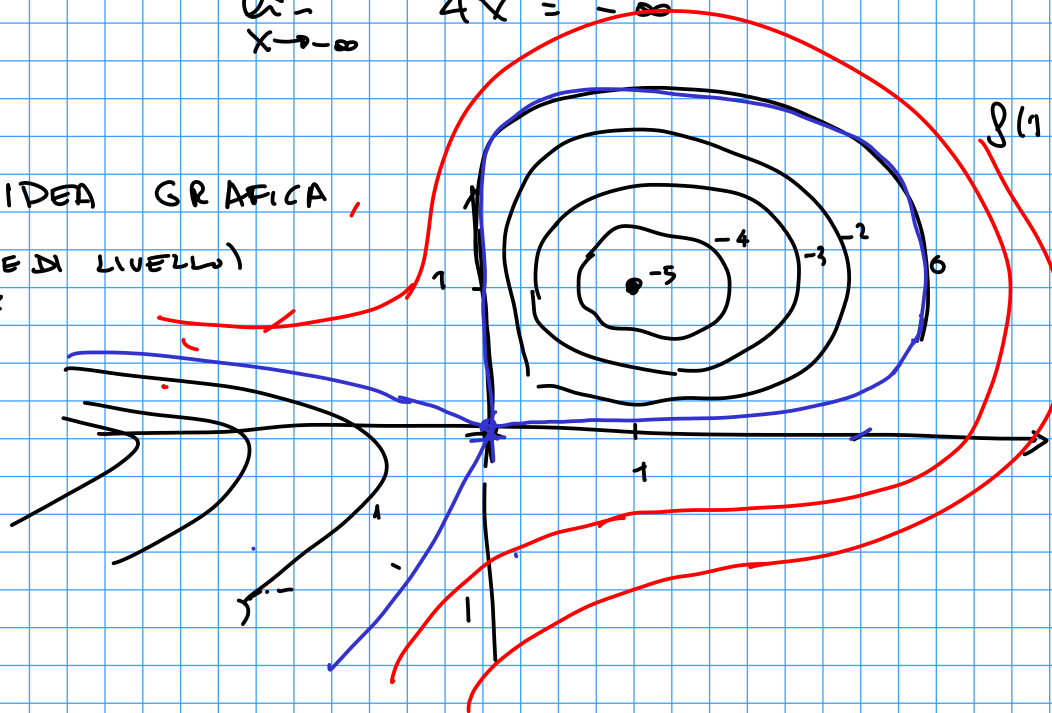
NO se guardo $f(x,0) = 4x^3$ e $\lim_{x \to -\infty} 4x^3 = -\infty$ $\Big\} \Rightarrow \inf f = -\infty$

$f(1,1) = 4+3-12 = -5 < 0$

IDEA GRAFICA

(LINEE DI LIVELLO)

$\sim$



PIÙ O MENO