Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 21 16/11/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$$f(x,y) = (x-1)e^{x-y}$$

sviluppo di ordine 3 nel pto $(1,1)$

La cosa più semplice è fare un cambio di variabile

$$x = 1+\xi \qquad y = 1+\eta \qquad (\xi,\eta) \simeq 0$$

$$f(1+\xi, 1+\eta) = \xi e^{\xi-\eta}$$

CONSIDERO $g(x,y) = x e^{x-y}$ e cerco $P_{g,(0,0)}$.

USO LO SVILUPPO DI $\underbrace{e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)}_{\Downarrow}$ uso $t = x-y$

$$g(x,y) = x\left(1+(x-y)+\frac{1}{2}(x-y)^2+o((x-y)^2)\right)$$

– ALCUNE TECNICHE con $o(\ )$ e $O(\cdot)$

① $f = o(g)$ se $\frac{f}{g} \to 0$ $\qquad f = O(g)$ se $\left|\frac{f}{g}\right|$ limitato

② $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$

②' $-O = O$

③ $f_1 = o(g) \quad f_2 = o(g) \Rightarrow f_1 + f_2 = o(g) \quad (o + o = o)$

$f_1 = o(g) \quad f_2 = O(g) \Rightarrow f_1 + f_2 = O(g) \quad (o + O = O)$

$(O + O = O)$

$f_1 = o(g) \quad f_2 = O(g) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 = o(g) \quad (o \cdot O = o)$

$f_1 = O(g) \quad f_2 = O(g) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 = O(g) \quad (O \cdot O = O)$

$o(f)^2 = o(f^2) \qquad O(f)^2 = O(f^2) \qquad (o \cdot o = o)$

④ se $f = o(g) \quad g = O(h) \Rightarrow f = o(h)$

---

se $x \in \mathbb{R}^N$ vicino a zero $|x_i| = O(\|x\|)$

infatti $|x_i| = \sqrt{x_i^2} \le \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2} \qquad \dfrac{|x_i|}{\|x\|} \le 1$

$|x_i| = O(\|x\|)$

$$g(x,y) = x\left(1 + (x-y) + \frac{1}{2}(x-y)^2 + \underbrace{o((x-y)^2)}_{\otimes}\right) =$$

$\otimes \leftarrow o(\|(x,y)\|^2)$

$$\left(\otimes \quad x - y = O(\|(x,y)\|) - O(\|(x,y)\|) = O(\|(x,y)\|)\right.$$

$$\left.\Rightarrow o((x-y)^2) = o(O(\|x,y\|)^2) = o(O(\|x,y\|^2)) = o(\|x,y\|)^2\right)$$

$$= x + x(x-y) + \frac{x}{2}(\overbrace{x-y}^{x^2+y^2-2xy})^2 + x\, o(\|(x,y)\|^2) =$$

$$\underbrace{x + x^2 - xy + \frac{x^3}{2} + \frac{xy^2}{2} - x^2 y}_{P_3} + \underbrace{O(\|(x,y)\|)\, o(\|(x,y)\|^2)}_{o(\|(x,y)\|^3)} =$$

NON CONTIENE TERMINI DI GRADO ≤ 3

$g(\xi,\eta) = P_3(\xi,\eta) + o(\|(\xi,\eta)\|^3) \Rightarrow$

$x = 1+\xi \quad y = 1+\eta$

$\xi = x-1 \quad \eta = y-1$

$$f(x,y) = g(x-1,y-1) = \underbrace{P_3(x-1,y-1)}_{P_3 \text{ di } f \text{ in } (1,1)} + o(\|(x-1,y-1)\|^3)$$

$$P_3(x,y) \quad x + x^2 - xy + \frac{x^3}{2} + \frac{xy^2}{2} - x^2y$$
$$\left(g(x,y) = x\, e^{x-y} \right)$$

!

CALCOLIAMO $\frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2}(0,0) = D\alpha\, g(0,0)$ con $\alpha = (1,2)$

So che il coeff. α-esimo di P_3 è dato da $\frac{1}{\alpha!} D\alpha\, g(0,0)(x,y)^\alpha =$

$$\frac{1}{1!\,2!} \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2}(0,0)\, x^1 y^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2}(0,0)\, xy^2 = \frac{xy^2}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2}(0,0) = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2}(0,0) = 1$$

VEDIAMO SE È VERO ....

- $g(x,y) = x\, e^{x-y}$ $\qquad g(0,0) = 0$
- $\frac{\partial g}{\partial x} = e^{x-y} + x\, e^{x-y} = (1+x)e^{x-y}$, $\quad \frac{\partial g}{\partial y} = -x\, e^{x-y}$

  IN $(x,y) = (0,0)$ $\qquad \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 1 \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$
- $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = e^{x-y} + (1+x)e^{x-y} = (2+x)e^{x-y}$; IN ZERO $\rightarrow$ 2

  (se divido per $(2,0)! = 2$ TROVO $\frac{2}{2} = 1$ che è il coeff. di x^2)

$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -(1+x)e^{x-y}$; IN ZERO TROVO -1

$(\alpha = (1,1)$ $\quad \alpha! = 1$ $\quad \Rightarrow \frac{-1}{1} = -1$ è il coeff di xy

$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x\, e^{x-y}$; in $(0,0)$ TROVO 0, (NON C'È y^2)

- $\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} = e^{x-y} + (2+x)e^{x-y} = (3+x)e^{x-y}$; in $(0,0)$ viene 3

  ($\alpha = (3,0)$ $\alpha! = 6$ $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \leftarrow$ coeff. di x^3)

- $\frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} = -(2+x)e^{x-y}$; in $(0,0)$ trovo -2

  ($\alpha = (2,1)$ $\alpha! = 2$ $-\frac{2}{2} = -1 \leftarrow$ coeff di $x^2 y$)

- $\frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2} = e^{x-y} + x e^{x-y} = (1+x)e^{x-y}$; in zero trovo 1

  ($\alpha = (1,2)$ $\alpha! = 2$ $\frac{1}{2} \leftarrow$ coeff di $x y^2$

- $\frac{\partial^3 g}{\partial y^3} = -x e^{x-y}$ in zero trovo 0, no y^3 ...

COMMENTO SU $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2}$ $\left(f(0,0) = 0 \right)$

VISTO È DIFF. perché $\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} \to 0$ cioè

$$\frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \leq \frac{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

SE AVESSI VOLUTO USARE IL DIFF. TOT ??

① $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (dalla def di derivata)

② Se $(x,y) \neq (0,0)$ posso calcolare le derivate con il calcolo diff:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^2) - x^2y^2 2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\left(x^2+y^2-x^2\right) = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ldots = \frac{2x^4 y}{(x^2+y^2)^2}$$

③ Per il diff. tot. devo dim che

$$\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \to 0 \qquad \frac{2x^4 y}{(x^2+y^2)^2} \to 0$$

4

uso $|x| \le \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad |y| \le \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$

$$\left| \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \right| \le 2\frac{\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} = 2\|(x,y)\| \longrightarrow 0$$

(lo stesso per $\frac{\partial f}{\partial y}$)

MORALE: USARE IL DIFF. TOT È PIÙ COMPLICATO