Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 20 15/11/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

N - Multiindici

- $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_N)$ $\quad \alpha_1, \ldots, \alpha_N$ interi ≥ 0
- $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$
- $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_N!$
- $v^\alpha = v_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot v_N^{\alpha_N}$ $\quad$ dove $v = (v_1, \ldots, v_N)$
- $D_\alpha f(x_1 \ldots x_N) = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} f(x_1 \ldots x_N)$

FORMULA

$$f^{(n)}(x_0)(\vec{v}^{\,n}) \quad \Big(= f^{(n)}(x_0)(\underbrace{\vec{v}, \vec{v}, \ldots, \vec{v}}_{n}) \Big)$$

$$\parallel$$

$$\sum_{|\alpha| = n} \frac{n!}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)\, v^\alpha$$

(N.B. $= \varphi^{(n)}(0)$ dove $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v})$ - si vede dalle definizioni)

IDEA DI DIM. Dalla linearità si ricava che

$$f^{(n)}(x_0)(\vec{v}, \dots, \vec{v}) = f^{(n)}(x_0)\underbrace{\left(\sum v_i \hat{e}_i, \dots, \sum v_i \hat{e}_i\right)}_{n}$$

$$= \underbrace{\sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_n=1}^{N}}_{n \text{ sommatorie}} \frac{\partial^n}{\underbrace{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}}_{n \text{ derivate}}} f(x_0) \underbrace{v_{i_1} \cdots v_{i_n}}_{n \text{ fattori}} =$$

- raggruppo mettendo insieme le stesse derivate fatte con ordine diverso → TROVO LA FORMULA

IN DEFINITIVA Se $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v})$

$$\varphi^{(n)}(0) = f^{(n)}(x_0)(\vec{v}^{\,n}) = \sum_{|\alpha|=n} \underbrace{\frac{n!}{\alpha!}} D\alpha f(x_0)\, \vec{v}^{\,\alpha}$$

conta quante derivate corrispondono a α

FORMULA DI TAYLOR

Prendo $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ f di classe C^n

PROBLEMA Trovare un polinomio P in N variabili, di grado n tale che

$$f(x) = P(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^n)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{f(x) - P(x - x_0)}{\|x - x_0\|^n} \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

OSS. Se $n = 1$ $P(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$

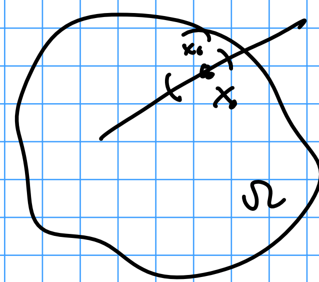
(per la def. di gradiente)

FACCIAMO UN CALCOLO (fissato $\vec{v}$). Poniamo, come prima

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v}) \qquad \text{dove } \vec{v} \in \mathbb{R}^N \text{ è fissato}$$

$\varphi : I \to \mathbb{R}$ dove $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$ con $\varepsilon > 0$

ε piccolo in modo che $x_0 + t\vec{v} \in \Omega$ se $-\varepsilon < t < \varepsilon$



φ è C^n su $]-\varepsilon, \varepsilon[$ e le derivate di φ sono

DERIVATA 0 $\quad \varphi(0) = f(x_0)$

DERIVATA 1 $\quad \varphi'(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + \overbrace{t\vec{v} + h\vec{v}}^{(t+h)\vec{v}}) - f(x_0 + t\vec{v})}{h} = f'(x_0 + t\vec{v})\vec{v}$

$$\varphi'(0) = f'(x_0)\vec{v}$$

DERIVATA 2 $\quad \varphi''(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\varphi'(t+h) - \varphi'(t)}{h} =$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + t\vec{v} + hv)(\vec{v}) - f'(x_0 + t\vec{v})(\vec{v})}{h} = f''(x_0 + t\vec{v})(\vec{v}, \vec{v})$$

$$\varphi''(0) = f''(x_0)(\vec{v}^2)$$

$\vdots$

DERIVATA n $\quad \varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(x_0 + t\vec{v})(v^n), \quad \varphi^{(n)}(0) = f^{(n)}(x_0)(\vec{v}^n)$

Se uso la formula di Taylor in $\mathbb{R}$, rispetto a $t_0 = 0$, ottengo

$$\varphi(t) = p(t) + o(|t|^n) \qquad \text{dove}$$

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} t^i$$

. IN ALTRI TERMINI

$$f(x_0 + t\vec{v}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)(\vec{v})^i}{i!} t^i + o(|t|^n) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{|\alpha| = i} \frac{1}{\cancel{i!}} \frac{\cancel{i!}}{\alpha!} D_\alpha f(x_0) v^\alpha t^i + o(|t|^n)$$

DUNQUE $f(x_0+t\vec{v}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(x_0) v^\alpha t^i + o(|t|^n)$

se io cerco P tale che $\boxed{f(x) = P(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)}$

$\Rightarrow$ mi restringo su $x = x_0 + t\vec{v}$ $\quad (\|x-x_0\| = t\|\vec{v}\|)$

$\vec{v} \neq 0$ ALLORA DEVE ESSERE) $o((t\|v\|)^n) = o(t^n)$

$\varphi(t) = f(x_0+t\vec{v}) = P(t\vec{v}) + o(t^n)$

DA QUANTO TROVATO SOPRA SEGUE

$$\underbrace{P(t\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(x_0) v^\alpha t^i}_{\forall t,\ \forall v}$$

se metto $t=1$ trovo

$$P(\vec{v}) = \sum_{|\alpha|\leq n} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(x_0) v^\alpha$$

DUNQUE L'UNICO POSSIBILE POLINOMIO DI TAYLOR È:

$$\boxed{P_{n,x_0}(\vec{v}) = \sum_{|\alpha|\leq n} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(x_0) v^\alpha}$$

BISOGNA VEDERE CHE EFFETTIVAMENTE P_{n,x_0} verifica $f(x) = P_{n,x_0}(x-x_0) + o(\|x-x_0\|^n)$

DIMOSTRIAMO PRIMA LA FORMULA CON RESTO DI LAGRANGE

TEOREMA Ω convesso, $x_0 \in \Omega$, f di classe $C^{n+1}(\Omega)$

Allora per ogni $x \in \Omega$ esiste ξ sul segmento tra x_0 e x tale che

$$f(x) = P_{m,x_0}(x-x_0) + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(\xi)(x-x_0)^\alpha$$

Dim. Con i calcoli fatti sopra vediamo che:

$$\boxed{\varphi(t) = p(t) + \varphi^{(m+1)}(\tau)\, t^{m+1}} \quad \text{con } \tau \text{ tra } 0 \text{ e } t$$

(Ho usato Taylor con resto di Lagrange per la

$\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v})$ uso $\vec{v} = x - x_0$, $t = 1$

(p è quello visto prima).

$$f(x) = f(x_0 + t(x-x_0))\Big|_{t=1} = p(1) + \varphi^{(n+1)}(\tau)\, 1^{n+1}, \quad 0<\tau<1$$

MA $p(1) = P_{m,x_0}(x-x_0)$ (guardando l'espressione di p sopra e ricordando che $v = x - x_0$)

INVECE $$\varphi^{(m+1)}(\tau) = \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(\underbrace{x_0 + \tau(x-x_0)}_{\xi})(x-x_0)^\alpha$$

ξ sul segmento tra x_0 e x

- DI FATTO MI SONO RICONDOTTO AL CASO UNIDIMENSIONALE METTENDOMI SUL SEGMENTO TRA x_0 e x
- Serve Ω convesso perché altrimenti $x_0 + \tau(x - x_0)$ può uscire da Ω.

#

$$f(x) = P_{n,x_0}(x-x_0) + R_{n,x_0}(x-x_0)$$

dove (secondo Lagrange) $$R_{n,x_0}(\vec{v}) = \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(\xi)\, \vec{v}^{\,\alpha}$$

TEOREMA (Taylor con resto di Peano)

Ω qualunque (non lo voglio necessariamente convesso)

$f \in C^m(\Omega)$

Allora $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{m,x_0}(x-x_0)}{\|x - x_0\|^n} = 0$$

(cioè $f(x) = P_{m,x_0}(x-x_0) + o(\|x-x_0\|^n)$)

Dim. Prendo $r>0$ tale che $B = B(x_0, r) \subset \Omega$.

Prendiamo $x \in B$ (B è convesso). Posso scrivere la formula con resto di Lagrange di ordine $m-1$:

$\forall x \in B$ $\exists$ ξ_x sul segmento da x_0 e x tale che
$$f(x) = P_{m-1,x_0}(x-x_0) + \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(\xi_x)(x-x_0)^\alpha =$$

(aggiungo e tolgo
$$= P_{m,x_0}(x-x_0) + \sum_{|\alpha|=n} \left(\frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(\xi_x)(x-x_0)^\alpha \boxed{- \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha} \right)$$
$$= P_{m,x_0}(x-x_0) + \underbrace{\sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \Big(D_\alpha f(\xi_x) - D_\alpha f(x_0) \Big)(x-x_0)^\alpha}_{R_m(x)}$$

DUNQUE, se $x \in B$,
$$f(x) = P_{m,x_0}(x) + R_m(x)$$

dove $R_m(x) =$ (*). Noto che $\boxed{|(x-x_0)^\alpha| \leq \|x-x_0\|^n}$

$$|(x-x_0)^\alpha| = |(x-x_0)_1^{\alpha_1} \cdots (x-x_0)_N^{\alpha_N}| \leq \|x-x_0\|^{\alpha_1} \cdots \|x-x_0\|^{\alpha_N} = \|x-x_0\|^n$$

$$\left(\begin{array}{l} x = (x_1 \dots x_n) \quad \text{allora} \quad |x_i| \le \|x\| \\ |x_i| = \sqrt{x_i^2} \le \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2} \end{array} \right)$$

Allora
$$|R_n(x)| \le \underbrace{\left(\sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} \left| D^\alpha f(\xi_x) - D^\alpha f(x_0) \right| \right)}_{\text{TENDE A ZERO}} \|x - x_0\|^n$$

e dunque
$$\frac{f(x) - P_{n,x_0}(x)}{\|x - x_0\|^n} = \frac{R_n(x)}{\|x - x_0\|^n} \longrightarrow 0$$

\#

ESEMPIO $\quad f(x,y) = (1+x-y)\ln(1-xy)$

PUNTO INIZIALE $(0,0)$

Cerco $P_4(x,y) = P_{4,(0,0)}(x,y)$

ci servono tutte le derivate fino alla quarta, calcolate in $(0,0)$

ZERO $\quad f(0,0) = 0$

UNO
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln(1-xy) - \frac{(1+x-y)}{1-xy}y \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\ln(1-xy) - \frac{1+x-y}{1-xy}x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

DUE
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-y}{1-xy} - y\frac{(1-xy)+(1+x-y)y}{(1-xy)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x}{1-xy} - x\frac{-(1-xy)-(1+x-y)(-x)}{(1-xy)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-x}{1-xy} - \frac{(1+x-2y)(1-xy) - (1-xy)y(-x)}{(1-xy)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$$

MI FERMO QUI. Ho TROVATO $P_{2,(0,0)}(x,y) = \frac{1}{(1,1)!} \cdot 1\, xy = -xy$

$\alpha = (1,1)$ è l'unico con $|\alpha| \le 2$ con $D^\alpha f(0,0) \ne 0$

e dunque $\quad f(x,y) = -xy + o(\|x,y\|^2)$

FACCIAMOLO IN UN ALTRO MODO. RICORDIAMO GLI SVILUPPI DI TAYLOR NOTI

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots (-1)^n \frac{t^n}{n} + o(t^n)$$

$$\Rightarrow \quad \ln(1-xy) = -xy - \frac{(-xy)^2}{2} + o(x^2y^2) \qquad (t=-xy)$$

$$= -xy - \frac{x^2y^2}{2} + o(x^2y^2) = -xy - \frac{x^2y^2}{2} + o(\|(x,y)\|^4)$$

OSSERVO CHE $\quad |x| \leq \|x,y\| \quad |y| \leq \|x,y\| \Rightarrow o(x^2y^2) = o(\|x,y\|^4)$

ALLORA

$$f(x,y) = (1+x-y)\left(-xy - \frac{x^2y^2}{2} + o(\|x,y\|^4)\right) =$$

$$-xy - \frac{x^2y^2}{2} + o(\|x,y\|^4) - x^2y - \frac{x^3y^2}{2} + x\,o(\|x,y\|^4) +$$

$o(\|x,y\|^4)$

$$+ xy^2 + \frac{x^2y^3}{2} \qquad y\,o(\|x,y\|^4) =$$

$$\underbrace{-xy + xy^2 - x^2y - \frac{x^2y^2}{2}}_{P_4(x,y)} + o(\|x,y\|^4)$$

Ho TROVATO P_4 (senza calcolo le derivate..) NE DEDUCO

il termine corrispondente a $\alpha = (2,2)$, cioè

$$\frac{1}{2!\,2!} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} f(0,0)\, x^2 y^2 = -\frac{x^2y^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} f(0,0) = -\frac{1}{2} \cdot 4 = -2$$