Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
# Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

## Lezione 19 14/11/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

## DERIVATE SECONDE

$f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ (ovvero potrei prendere $\Omega \subset X$ $f : \Omega \to X_1$

$x_0 \in \Omega$ $X$ e $X_1$ spazi di dim $< +\infty$, con una norma)

Derivate seconde direzionali: Dati $\vec{v}$ e $\vec{w} \in \mathbb{R}^N$ supponiamo che

$\exists$ $f'(x)(\vec{w})$ $\forall x$ vicino a $x_0$ e supponiamo che

$$\exists \quad \left(f'(x)(\vec{w})\right)'_{x=x_0}(\vec{v}) = \lim_{t \to 0} \frac{f'(x_0+t\vec{v})(\vec{w}) - f'(x_0)(\vec{w})}{t}$$

Il risultato lo chiamo derivata seconda in $x_0$ nelle direzioni $\vec{v}$, $\vec{w}$ e lo scrivo $f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w})$

- In particolare chiamo derivate parziali seconde

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0) = f''(x_0)(\hat{e}_i, \hat{e}_j) \qquad \hat{e}_i = (0 .. \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-esima}}}{1} \, 0 \, 0 \, 0)$$

cioè

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right)(x_0)$$

ANALOGAMENTE A QUANTO VISTO PER le derivate prime

l'esistenza di $f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w})$ non garantisce buone proprietà

di $f$, $df$. MI SERVE UNA DEF. PIÙ FORTE

DIFFERENZIALE SECONDO Supponiamo che $f$ sia

differenziabile per ogni $x$ vicino a $x_0$ (per esempio

per ogni $x \in \Omega$). Allora ho la funzione

$$df : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M) = \mathcal{L}(X, X_1) = \text{applicazioni lineari}$$

da $X$ in $X_1$ $\simeq$ matrici $M \times N$

$$\left( df(x) = \text{app lin. tale che} \ldots = J_f(x) \right)$$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ $\left( \circ\ \mathcal{M}(M \times N) \right)$ è anche lui uno spazio vettoriale

con una norma ( la $\|L\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Lx\|$ )

HA SENSO DIRE CHE $df$ è differenziabile in

$x_0$ $\to$ VUOL DIRE CHE

$$df(x) = df(x_0) + L(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

dove $L$ è lineare da $\mathbb{R}^N \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$

Se questo avviene chiamo $d^2 f(x_0)$ questo $L$

Questo $L$ ha in effetti due argomenti: $\vec{v}$ o $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^N$

Infatti se $\vec{w} \in \mathbb{R}^N$ ha senso fare $L\vec{w} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$

Dunque $(L\vec{w})(\vec{v}) \in \mathbb{R}^M$. DUNQUE posso identificare

$d^2 f(x_0)$ come un'applicazione bilineare da $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

FATTO Se $f$ ammette diff. seconda $\Rightarrow$

$\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^N$ $\quad d^2 f(x_0)(\vec{v}, \vec{w}) = f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w})$

$\left(d^2 f(x_0)''(\vec{w})\right)(\vec{v})$

(si dimostra) QUINDI SE $f$ è diff 2 volte

$\Rightarrow (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w})$ (esiste ed) è bilineare in $(\vec{v}, \vec{w})$

TEOR. (diff. tot.) Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ esistono $\forall x \in \Omega$

e sono continue in $x_0$ $\Rightarrow$ $f$ ammette diff. seconda in $x_0$.

DUNQUE Se $f$ è di classe $C^2(\Omega)$ $\left(\exists \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) \ \forall x \text{ CONTINUE IN } \Omega\right)$

$\Rightarrow$ $f$ ammette diff seconda $\forall x \in \Omega$.

INOLTRE, se $\exists\, d^2 f(x_0)$ $\Rightarrow$ $\vec{v} = (v_1 \dots v_N)$, $\vec{w} = (w_1 \dots w_N)$

$$d^2 f(x_0)(\vec{v}, \vec{w}) = d^2 f(x_0)\left(\sum v_i \hat{e}_i, \sum w_j \hat{e}_j\right) =$$

$\mathbb{R}^M$

$$f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w}) \quad \sum_{i,j} v_i w_j \, d^2 f(x_0)(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = \sum_{i,j} v_i w_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$$ ← vero sempre

$$= \left(H f(x_0) \vec{w}\right) \cdot \vec{v} \qquad \text{dove } H_f(x_0)$$

(supponiamo $M = 1$)

è la matrice $N \times N$ (se $M > 1$ gli elementi sono vettori di $\mathbb{R}^M$)

di componenti $h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$

che si chiama MATRICE HESSIANA DI $f$ in $x_0$

$$H_f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_N \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_N \partial x_N} \end{bmatrix}$$

$H_f(x_0)$ rappresenta $d^2 f(x_0)$

ESEMPIO $\quad f(x,y) = x^3 y^2 \qquad (x_0, y_0) = (2,1)$

Allora $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 6xy^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2 y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2 y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 2x^3$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6xy^2 \,, & 6x^2 y \\ 6x^2 y \,, & 2x^3 \end{bmatrix} \qquad H_f(2,1) = \begin{bmatrix} 12 & 24 \\ 24 & 16 \end{bmatrix}$$

(se considero $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ $\quad H_f$ "ha come componenti" dei vettori di $\mathbb{R}^M$ $\simeq$ è un oggetto con tre indici $i,j = 1..N$, $k = 1..M$)

---

PUÒ SUCCEDERE CHE $\quad f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w}) \neq f''(x_0)(\vec{w}, \vec{v})$

in particolare può succedere che $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$

PER ESEMPIO

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \dfrac{(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$x^3 y - x y^3$

calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ se $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3 y - x y^3) 2x}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$y \, \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - 2x^4 + 2x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$y\,\frac{3x^4+3x^2y^2-x^2y^2-y^4-2x^4+2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = y\,\frac{(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = y\,\frac{(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = -x\,\frac{(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}} \qquad \big(f(y,x) = -f(x,y)\big)$$

se $(x,y) = (0,0)$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

(per la def. di derivata, dato che $f(0,y) = 0 = f(x,0)$ $\forall x\ \forall y$)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = (\text{se esiste})\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{x\to 0} -\frac{(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{+x^4}{x^4} = 1$$

<u>D'ALTRA PARTE</u>

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}^{=0}\right)\frac{1}{y} =$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{y\to 0}\frac{-y^4}{y^4} = -1$$

IN GENERALE $H_f$ potrebbe non essere simmetrica

PERÒ

TEOREMA (Schwartz) Se $f$ è $C^2$

( $\exists \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ CONTINUE IN $\Omega$ ) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

Si potrebbe essere più specifici:

Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}$ $\exists$ in $\Omega$ e sono continue in $x_0$ $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$$

DUNQUE, NEL CONTROESEMPIO $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$ NON SONO CONTINUE IN $(0,0)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 0$ $\qquad$ (solo perché $f(x,0) = f(0,y) = 0$)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1$ $\qquad H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Se facessi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ in $(x,y) \neq (0,0)$ troverei un'espressione complicata che non tende a 1 per $(x,y) \to (0,0)$

(NON FACCIAMO IL CONTO..)

DERIVATE DI ORDINE K generico.

Se $f: \Omega \to \mathbb{R}^M$ $\quad \Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto $\quad x_0 \in \Omega$

DERIVATE DIREZIONALI K-esime

$$f^{(k)}(x_0)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \text{derivata lungo } \vec{v}_1 \text{ di } f^{(k-1)}(x_0)(\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k) = \dots$$

per es. $\quad f'''(x_0)(\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3) \qquad \left(f''(x)(\vec{v}_2, \vec{v}_3)\right)'(x_0)(\vec{v}_1)$

e così via ...

DERIVATE PARZIALI $\quad \dfrac{\partial^{(k)} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_0) = f^{(k)}(x_0)(\hat{e}_{i_1} \dots \hat{e}_{i_k})$

per es. $\quad \dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0) = f^{(4)}(x_0, y_0, z_0)(\hat{e}_1\ \hat{e}_2\ \hat{e}_2\ \hat{e}_3) =$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) \Big|_{x = x_0,\, y = y_0,\, z = z_0}$$

FATTO: Se $f$ è di classe $C^K(\Omega)$ ($\exists$ derivate parziali K-esime continue) allora

(si può definire un differenziale K-esimo, come una "applicazione K-lineare" ...) e vale

$$(v_1 \dots v_k) \longmapsto f^{(k)}(x_0)(v_1, \dots v_k) \quad \text{è}$$

LINEARE IN OGNI COMPONENTE (è K-lineare)

inoltre è SIMMETRICA

$$f^{(k)}(x_0)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots \vec{v}_j \quad \vec{v}_k) = f^{(k)}(x_0)(\vec{v}_1, \quad \vec{v}_j \quad \vec{v}_i \quad \vec{v}_k)$$

(se scambio due direzioni ottengo lo stesso risultato)

$f \in C^k$

CONVENZIONE Scrivo $\dfrac{\partial^{(k)}}{\underbrace{\partial x_1 \cdots \partial x_1}_{k_1} \underbrace{\partial x_2 \cdots \partial x_2}_{k_2} \cdots} = \dfrac{\partial^{(k)}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots}$

$$\frac{\partial^5}{\partial x \partial y \partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z}$$

PER MANEGGIARE QUESTE DERIVATE (Vogliamo la FORMULA DI TAYLOR)

CONVIENE INTRODURRE DELLE NOTAZIONI / CONVENZIONI

FISSIAMO $N$ (la dim. in partenza) e $M = 1$ (per semplicità)

$N$- MULTIINDICE (MULTIINDICE DI ORDINE $N$)

è una $N$-upla di interi

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \qquad \alpha_i \in \{0, 1, \dots\} = \mathbb{N}$$

$\rightarrow \alpha = (0, 5, 3, 0, 1) \quad (N = 5)$

$\rightarrow |\alpha| = 9$

Se $\alpha$ è un multiindice

- LUNGHEZZA DI $\alpha$ $\quad |\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$
- $D_\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$ ($\alpha_i$ indica quante volte derivo rispetto a $x_i$)

$\rightarrow D^\alpha f = \dfrac{\partial^9}{\partial y^5 \partial z^3 \partial w} f(x, y, z, v, w)$

- Se $\vec{v} = (v_1 \dots v_N) \in \mathbb{R}^N$

$$\vec{v}^{\,\alpha} = (v_1^{\alpha_1} \dots v_N^{\alpha_N})$$

- $\alpha! := \alpha_1!\, \alpha_2! \cdots \alpha_N!$

$\rightarrow \alpha! = 0!\, 5!\, 3!\, 0!\, 1! = 120 \cdot 6 = 1320$

• Se $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ indico con

$$f^{(k)}(x_0)(v^k) = f^{(k)}(x_0)(\underbrace{\vec{v}, \dots, \vec{v}}_{k \text{ volte}})$$

(derivo $k$ volte lungo $\vec{v}$)

. Se $k=2$ $\quad f''(x_0)(v^2) := f''(x_0)(v,v) = (Hf(x_0)\vec{v})\vec{v}$

= forma quadratica associata a $Hf$.

Proposizione

$$f^{(k)}(x_0)(v^k) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{n!}{\alpha!} D_\alpha f(x_0) v^\alpha$$

(IDEA) CASO $k=2$

$$f''(x_0)(v,v) = f''(x_0)\left(\sum v_i \hat{e}_i , \sum v_j \hat{e}_j\right) =$$

$$\sum_i \sum_j f''(x_0)(\hat{e}_i, \hat{e}_j) v_i v_j = \boxed{\sum_i \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) v_i v_j =}$$

$$\sum_{i=j=1}^{N} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} v_i^2 + 2 \sum_{i>j} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} v_i v_j = \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} D_\alpha f \; v^\alpha$$

$\alpha = (0, \dots 2 \dots 0) \to \alpha! = 2$

$\alpha = (0 \dots 1 \dots 1 \dots 0) \to \alpha! = 1$