Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 18 09/11/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

INTEPRETAZIONE DEL GRADIENTE DI $f: \Omega \to \mathbb{R}$ (in $x_0 \in \Omega$). RICORDO CHE

$$\boxed{f'(x_0)(\vec{v}) = \nabla f(x_0) \cdot \vec{v}}$$

NOTIAMO CHE ALLORA

(1) $f'(x_0)(\vec{v}) \leq \|\nabla f(x_0)\| \, \|\vec{v}\|$ (Schwartz)

Se mi metto nei vettori $\vec{v}$ con $\|\vec{v}\| = 1$ ho

$$f'(x_0)(\vec{v}) \leq \|\nabla f(x_0)\| \quad \forall \vec{v} \in S$$

$(S = \{\vec{v} : \|\vec{v}\| = 1\})$

OSS. se $\nabla f(x_0) = 0$ allora $f'(x_0)(\vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v}$

(2) Suppongo che $\nabla f(x_0) \neq 0$ Posso prendere

$$\vec{v} := \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|} \qquad (\vec{v} \in S)$$

e allora $\quad f'(x_0)(\vec{v}) = \nabla f(x_0) \cdot \dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|} = \|\nabla f(x_0)\|$

(1) + (2) ci dicono che

(a) $\quad \|\nabla f(x_0)\| = \max \left\{ f'(x_0)(\vec{v}) \quad \vec{v} \in S \right\}$

(l'ho ricavato se $\nabla f(x_0) \neq 0$, ma è chiaro che è vero anche se $\nabla f(x_0) = 0$)

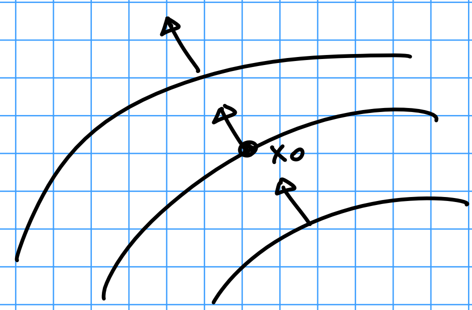
(b) se $\nabla f(x_0) \neq 0$ allora $\dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ (il versore relativo a $\nabla f(x_0)$)

è la "direzione" (quel vettore unitario) $\vec{v}$, su cui $f'(x_0)(\vec{v})$ è massimo

---

TORNANDO ALLE LINEE (o SUPERFICI) di LIVELLO abbiamo che

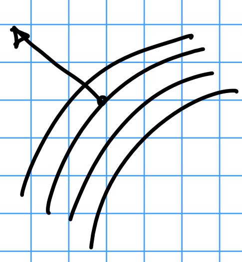
(1)

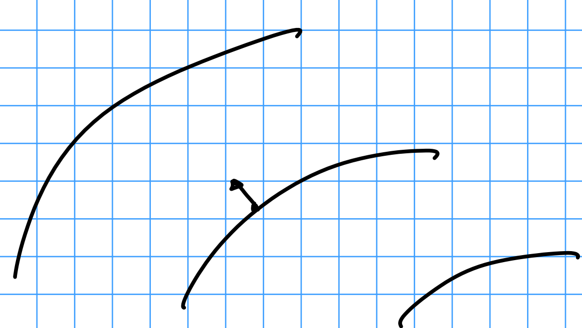


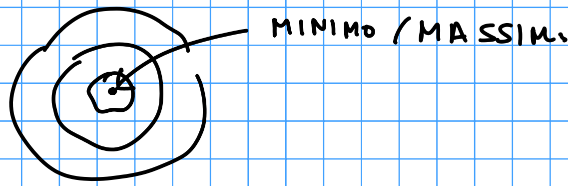
$\nabla f(x_0) \perp$ linea di livello $\{ f(x) = f(x_0) \}$

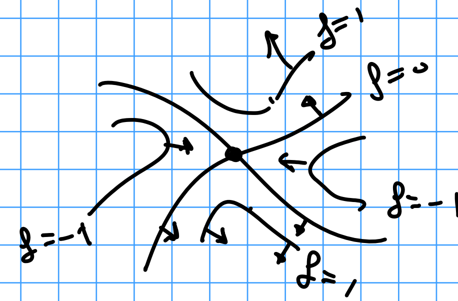
(2) il verso di $\nabla f(x_0)$ è nella direzione in cui f cresce (il più possibile)

(3) Più alto è $\|\nabla f(x_0)\|$ "più FITTE" sono le linee di livello:





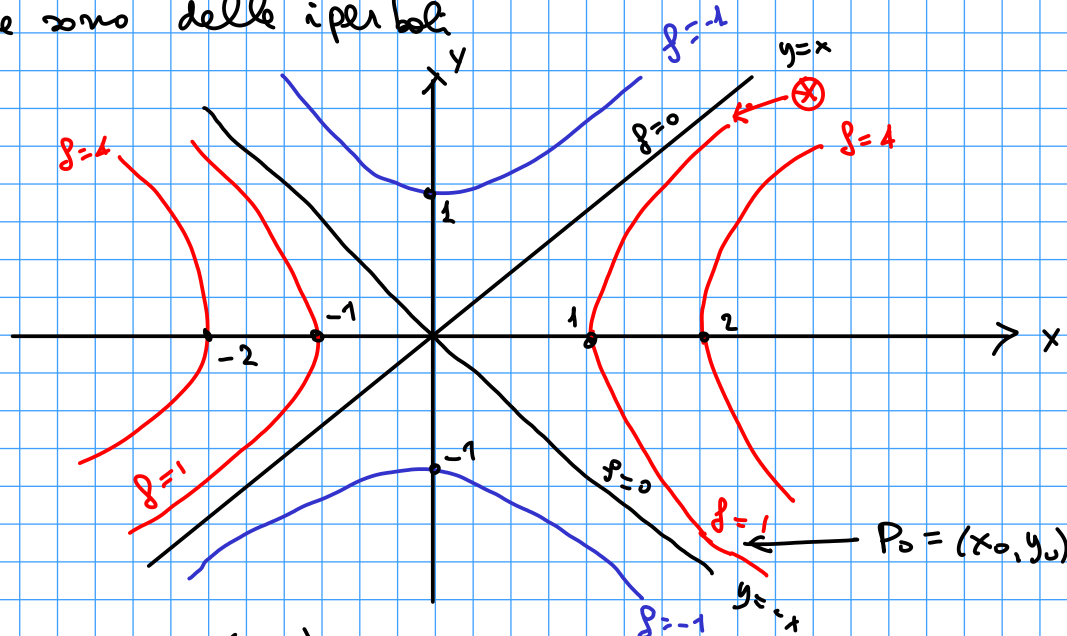




Per esempio $f(x,y) = x^2 - y^2$. Se $c \in \mathbb{R}$

la linea di livello c è data dai punti $x^2 - y^2 = c$

che sono delle iperboli



$$\nabla f(x,y) = 2\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Prendiamo il ramo di iperbole di eq. $x^2 - y^2 = 1$ con $x>0$

⊛ Lo posso descrivere parametricamente mediante la curva

$$\gamma(t) = (\cosh(t), \sinh(t))$$

è chiaro che $\gamma(t)$ sta nell'iperbole perché

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

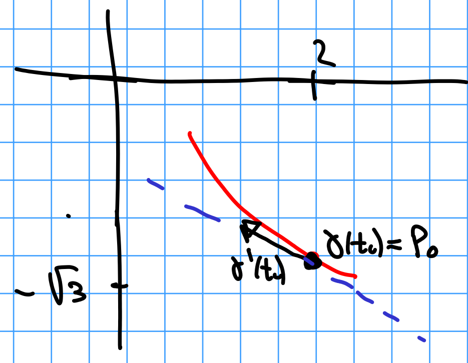
Si può verificare che, se $x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow \exists\, t : \gamma(t) = (x,y)$

- Prendiamo un punto (x_0, y_0) su questo ramo di iperbole.

Per esempio $x_0 = 2$ $y_0 = -\sqrt{3}$. Ci sarà un t_0

tale che $2 = \cosh(t_0)$ $\quad -\sqrt{3} = \sinh(t_0)$ $\quad (t_0 < 0)$

POSSO CALCOLARE $\gamma'(t_0) = (\sinh(t_0), \cosh(t_0))$
$= (-\sqrt{3}, 2)$



: retta tangente al ramo di iperbole
: $P_0 + s\,\gamma'(t_0)$ $\quad s \in \mathbb{R}$

Volendo trovare la retta tangente al ramo di iperbole, in forma param.

$$r(t) = (2, -\sqrt{3}) + s(-\sqrt{3}, 2) \qquad s \in \mathbb{R}$$

da cui posso trovare l'equazione: se

$$x = 2 - \sqrt{3}\,s \qquad y = -\sqrt{3} + 2s$$

allora $s = \dfrac{x-2}{-\sqrt{3}} = \dfrac{2-x}{\sqrt{3}}$ e quindi

$$y = -\sqrt{3} + \frac{2(2-x)}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}x = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}x$$

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{3}(1-2x)}$$

Calcoliamo $\nabla f(P_0) = 2\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}\Bigg|_{x=2\ y=-\sqrt{3}} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Verifichiamo che $\nabla f(P_0) \perp$ retta $(\nabla f(P_0) \perp \gamma'(t_0))$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = -4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 0 \quad !!$$

SULLA DIFFERENZIABILITA'

$$f(x,y) = \frac{x y^2}{x^2+y^2} \qquad f(0,0) = 0$$

MI CHIEDO SE f è diff. in $\underline{0} = (0,0)$

Nota 1 abbiamo già visto che f è continua in $(0,0)$

$$\left| \frac{x y^2}{x^2+y^2} \right| = |x| \underbrace{\left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right|}_{\leq 1} \leq |x| \qquad \text{e } |x| \to 0$$

se $(x,y) \to (0,0)$

Nota 2 Si vede che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

DALLA DEFINIZIONE DI DERIVATA PARZIALE

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{f(0+x,0) - f(0,0)}{x}}_{= \frac{0-0}{x} = 0 \ \forall x} =$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ ... stesso discorso.

Proviamo a "sondare" la differenziabilità mediante la definizione

PROBLEMA : $$\frac{f(x,y) - \overset{=0}{f(0,0)} - \overbrace{df(0,0)(x-0, y-0)}^{=0}}{\|(x,y)\|} \overset{??}{\longrightarrow} 0$$

dove $df(0,0)$ se c'è deve essere

$$df(0,0)(v_x, v_y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, v_y = 0$$

DUNQUE f è diff in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$

cioè $$\frac{x y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \to 0$$ NO f NON È DIFF.

NON È VERO. Basta guardare questa espressione sulle rette

$y = mx$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{x \; m^2 x^2}{(x^2 + m^2 x^2)^{3/2}} = \dfrac{m^2}{(1+m^2)^{3/2}}$ che è $\neq 0$
$x > 0$

$f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^2}$. RAGIONO COME SOPRA

$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \right)$

f diff $\Leftrightarrow$ $\dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^2} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$

$\boxed{\text{sì}}$ lo vedo così :

$$\frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{|xy|}{x^2+y^2} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}}{x^2+y^2} \frac{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

#