Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 17   08/11/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$f: \Omega \to \mathbb{R}^M$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto , $x_0 \in \Omega$

<u>DICO</u> che f è $C^1(\Omega)$ se f ammette derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ per ogni $x \in \Omega$, $\forall i = 1 .. N$, e tali derivate parziali sono CONTINUE su Ω

- A volte serve la nozione di $C^1(\bar{\Omega})$ cioè f è la restrizione a $\bar{\Omega}$ di una funzione $C^1(\Omega')$ dove Ω' è un aperto tale che $\bar{\Omega} \subset \Omega'$

Se $\boxed{f \text{ è } C^1(\Omega)}$ è definita in ogni $x \in \Omega$ la matrice <u>Jacobiana</u> $J_f(x)$ che è la matrice $M \times N$ di elementi

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ & & \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_M}{\partial x_N} \end{bmatrix} =$$

QUESTA MATRICE ha le proprietà:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{J_f(x)\,(x-x_0)}_{df(x_0)(x-x_0)} + R(x,x_0)$$

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE.

[CONVENZIONE: $(x-x_0)$ è un vettore colonna]

con $R(x,x_0) = o(\|x-x_0\|)$ CIOÈ $\dfrac{R(x,x_0)}{\|x-x_0\|} \xrightarrow{x\to x_0} 0$

(Ho USATO IL TEOR. DELL DIFF. TOTALE per dire che f è differenziabile, e poi ho usato il fatto che $df(x_0)\vec{v} = J_f(x_0)\vec{v}$ VISTO IERI). INOLTRE:

$$f'(x_0)(\vec{v}) = J_f(x_0)\,\vec{v}$$

RISULTATI DI "CALCOLO" f, g sono C^1 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- LINEARITÀ $J_{\lambda f + \mu g}(x) = \lambda J_f(x) + \mu J_g(x)$

- PRODOTTI (a) $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^M$, $g: \Omega \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ posso fare $g\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^M$

a livello di componenti:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(gf)_i(x)}_{\text{comp } i,j \text{ di } J_{gf}} = \frac{\partial}{\partial x_j} g(x) f_i(x) = \underbrace{\frac{\partial g(x)}{\partial x_j}}_{??} f_i(x) + g(x)\underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)}_{\text{comp. } i,j \text{ di } J_f}$$

$(i = 1 \ldots M$, $j = 1 \ldots N)$

IN FORMA "SINTETICA" HO TROVATO:

$$\boxed{J_{g\vec{f}}(x) = \vec{f} \otimes J_g + g(x) J_{\vec{f}}(x)}$$

dove se $v = (v_1 \ldots v_N)$ $w = (w_1 \ldots w_M)$

INDICO $v \otimes w = \text{matrice}\{v_i w_j\}$ $\begin{matrix} i = 1 \ldots N \\ j = 1 \ldots M \end{matrix}$

- (prodotto scalare) $\vec{f}, \vec{g}: \Omega \to \mathbb{R}^M$ $\vec{f}\cdot\vec{g}: \Omega \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\vec{f}\cdot\vec{g})(x) = \frac{\partial \vec{f}(x)}{\partial x_j} \cdot \vec{g}(x) + \vec{f}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \vec{g}(x)$$ ← COMP. i,j di $J_{\vec{f}\cdot\vec{g}}$

CIOÈ $J_{\vec{f}\cdot\vec{g}} = \vec{g}^t(x) J_{\vec{f}}(x) + \vec{f}^t(x) J_{\vec{g}}(x)$.

$$? \ \underbrace{[g_1 \cdots g_M]}_{g^t} \cdot \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big| \cdots \Big| \frac{\partial f}{\partial x_N} \right]}_{J_f} \Big\} M = \left[g \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, g \cdot \frac{\partial f}{\partial x_N} \right]$$

$\circledast$

$$J_{\vec{f} \cdot \vec{g}} = \vec{g}^{\,t} J_{\vec{f}} + \vec{f}^{\,t} J_{\vec{g}}$$

DEF. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ chiamo <u>gradiente</u> di f il VETTORE

(in $\mathbb{R}^N$) $\nabla f(x) = J_f(x)^t$ e cioè

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

QUESTO VETTORE HA LA PROPRIETÀ

$$\nabla f(x) \cdot \vec{v} = J_f(x) \vec{v} \qquad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$$

che è ovvio dato che

$$J_f(x) \vec{v} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_N} \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \underbrace{J_f(x)^t}_{\nabla f(x)} \cdot \vec{v}$$

(se $f : \Omega \to \mathbb{R}$)

DUNQUE IL GRADIENTE DI f in x è quel vettore $\nabla f(x)$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

ALLORA LA FORMULA sopra sul prodotto scalare:

$$J_{\vec{f}\cdot\vec{g}} = \vec{g}^{\,t} J_{\vec{f}} + \vec{f}^{\,t} J_{\vec{g}}$$

diventa (passando ai trasposti):

$$\nabla(\vec{f}\cdot\vec{g}) = \underset{N\times M}{J_{\vec{f}}^{\,t}}\ \underset{M}{\vec{g}} + J_{\vec{g}}^{\,t}\,\vec{f} \quad \leftarrow N$$

IN PARTICOLARE se $\vec{f} = \vec{g}$, posto $h(x) = \|\vec{f}\|^2$

$$\boxed{\nabla h(x) = 2 J_{\vec{f}}^{\,t}\,\vec{f}}$$

CASO particolare se $f(x) = Ax$ A matrice $M\times N$ (fisso)

$f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$. Chi è $J_f(x)$? | $A = \{a_{ij}\}$ $i=1..M$ $j=1..N$

- Modo calcoloso. Devo trovare.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(Ax)_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{N} a_{ik} x_k\right) = \qquad (i=1..M)$$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ik} x_k = a_{ij} \qquad \text{PERCHÉ } \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ik} x_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k\neq j \\ a_{ik} = a_{ij} & \text{se } k=j \end{cases}$$

- Modo furbo: $J := J_f(x)$ è definito dalla proprietà

$$\underset{Ax}{f(x)} = \underset{Ax_0}{f(x_0)} + J(x-x_0) + o(\|x-x_0\|) \qquad \text{CIOÈ}$$

$$A(x-x_0) = J(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)$$

È chiaro che se $J = A$ vale l'uguaglianza con $o(-)=0$

Dato che J è unico $\Rightarrow J = A$

Se $f(x) = Ax \Rightarrow J_f(x) = A$ (non dipende da x)

(se $N=1$ sto dicendo che $\frac{d}{dx} ax = a$)

· Calcoliamo il gradiente di $h(x) = \|Ax\|^2 = Ax \cdot Ax$

· modo calcoloso: $h(x) = \sum_{i=1}^{M} (Ax)_i^2 =$

$$\sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{k=1}^{N} a_{ik} x_k \right)^2 .$$

$j=1..N$ $\quad \frac{\partial}{\partial x_j} h(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{k=1}^{N} a_{ik} x_k \right)^2 = \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^{N} a_{ik} x_k \right)^2 =$

$$\sum_{i=1}^{M} \left[2 \left(\sum_{k=1}^{N} a_{ik} x_k \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum a_{ik} x_k \right) \right] = 2 \sum_{i=1}^{M} \left[\left(\sum_{k=1}^{N} a_{ik} x_k \right) a_{ij} \right]$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} a_{ik} x_k a_{ij} = (*)$$ ← COMPONENTE j di $\nabla h(x)$

(scambio le sommatorie)

$\sum_{k=1}^{N} (A^t A_{jk}) x_k$

LO CAPISCO GUARDANDO LA FORMULA SOTTO

. VEDIAMO LA FORMULA "SINTETICA"

$h = \vec{f} \cdot \vec{f} = \|\vec{f}\|^2$ e

$$\boxed{\nabla h(x) = 2 J_f^t \vec{f}}$$

dove $f = Ax \Rightarrow$

$J_f = A$

$\Rightarrow \nabla h = 2 A^t A x$ = (se lo scrivo esplicitamente ritrovo $(*)$)

SE $A = I$ allora $\nabla \|x\|^2 = 2x$

(che è facile da ricavare direttamente: $\frac{\partial}{\partial x_j} (x_1^2 + \dots + x_N^2) = 2x_j$)

Allora se $h_1(x) = \|Ax\|$ ho che h_1 è differenziabile in x se $Ax \neq 0$ e

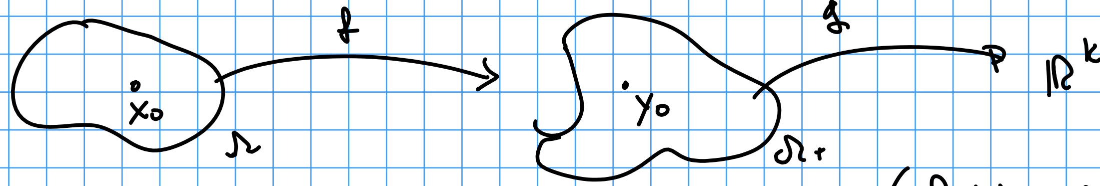
lo capiamo meglio dopo

$$\nabla \|Ax\| = \nabla \sqrt{\|Ax\|^2} = \dots \frac{1}{2\|Ax\|^2} \nabla \|Ax\|^2 = \frac{1}{\|Ax\|^2} A^t A x =$$

• Se $A = I$ allora trovo che $\|x\|$ è diff. se $x \neq 0$ e $\nabla \|x\| = \dfrac{x}{\|x\|}$

• <u>COMPOSIZIONE</u> $f : \Omega \to \Omega_1$ $g : \Omega_1 \to \mathbb{R}^K$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^M$ Ω_1, Ω_1 aperti



$x_0 \in \Omega$ $y_0 := f(x_0) \in \Omega_1$ $\left(\begin{array}{l} h(x) = g(f(x)) \\ h : \Omega_1 \to \mathbb{R}^K \end{array} \right)$

Se f è diff. in x_0, g è diff in y_0 $\Rightarrow$ $h := g \circ f$ è differenziabile in x_0 e vale

$$dh(x_0) = dg(y_0) \circ df(x_0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\underset{K \times N}{J_h(x_0)} = \underset{K \times M}{J_g(y_0)} \; \underset{M \times N}{J_f(x_0)} = J_g(f(x_0)) J_f(x_0)$$

<u>Idea di dim.</u> So che ① $f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{= y_0} + J_f(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0)$

dove $R(x, x_0)$ è $o(\|x - x_0\|)$

② $g(y) = g(y_0) + J_g(y_0)(y - y_0) + R_1(y, y_0)$

dove $R_1(y, y_0) = o(\|y - y_0\|)$

$y = f(x_0)$

Metto insieme le due cose $\Rightarrow$ metto prima $f(x)$ al posto di y nella ②

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + J_g(y_0)(f(x) - f(x_0)) + R_1(f(x), f(x_0)) =$$

(uso e (1))

$$g(f(x_0)) + J_g(y_0)\Big(J_f(x_0)(x-x_0) + R(x,x_0)\Big) + R_1(f(x), f(x_0))$$

IN ALTRI TERMINI

$$h(x) = h(x_0) + \underbrace{J_g(y_0)\, J_f(x_0)}(x-x_0) + \underbrace{J_g(y_0)R(x,x_0) + R_1(f(x),f(x_0))}_{R_2(x,x_0)}$$

si vede con un po' di pazienza che $R_2(x,x_0) = o(\|x-x_0\|)$

dunque $\quad J_h(x_0) = J_g(y_0)\, J_f(x_0) = J_g(f(x_0))\, J_f(x_0)$

QUESTA FORMULA, letta nelle componenti, ci dice che

$$\boxed{\begin{array}{l} i=1..K \\ j=1...N \end{array} \quad \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{M} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x))\, \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)}_{\text{componente } i,j \text{ di } J_g(y_0) J_f(x_0)}} \qquad ☆$$

Casi particolari di ☆

. se $\boxed{g : \Omega_1 \to \mathbb{R}}$ $\Rightarrow$ $h : \Omega \to \mathbb{R}$.

Vediamo il gradiente di h:

$$\nabla h(x) = J_h(x)^t = \big(J_g(f(x))\, J_f(x)\big)^t =$$

$$J_f(x)^t\ \nabla g(f(x))$$

$$\nabla(g \circ f) = J_f(x)^t\, \nabla g(f(x))$$

$\boxed{\text{Per esempio}}$ $\quad \alpha > 2 \quad$ e prendo $h(x) = \|Ax\|^{\alpha}$ $\quad$ (A $M \times N$)

Posso vedere $\quad f(x) = \|Ax\|^2 \qquad f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

$g(y) = y^{\alpha/2}$ $\quad g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ $\quad h(x) = g(f(x))$

ABBIAMO VISTO $\nabla h(x) = 2 A^t A x$

e sappiamo che g è derivabile e $g'(y) = \frac{\alpha}{2} y^{\frac{\alpha}{2}-1} = \frac{\alpha}{2} y^{\frac{\alpha-2}{2}}$

DUNQUE $\nabla h = \underset{\text{VETTORE}}{\nabla f(x)} \; \underset{\text{NUMERO}}{g'(f(x))} = g'(f(x)) \nabla f(x) =$

$$\frac{\alpha}{2} f(x)^{\frac{\alpha-2}{2}} 2 A^t A x = \alpha \left(\|Ax\|^2\right)^{\frac{\alpha-2}{2}} A^t A x =$$

$$\alpha \|Ax\|^{\alpha-2} A^t A x$$

In componenti: $\frac{\partial}{\partial x_j} \|Ax\|^\alpha = \alpha \|Ax\|^{\alpha-2} \sum_{\substack{k=1..N \\ i=1..M}} a_{ik} a_{ij} x_k$

ESEMPIO IMPORTANTE

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega \subset \mathbb{R}^N$ $\quad f \; C^1$

$\gamma : [a, b] \to \Omega$ curva C^1.

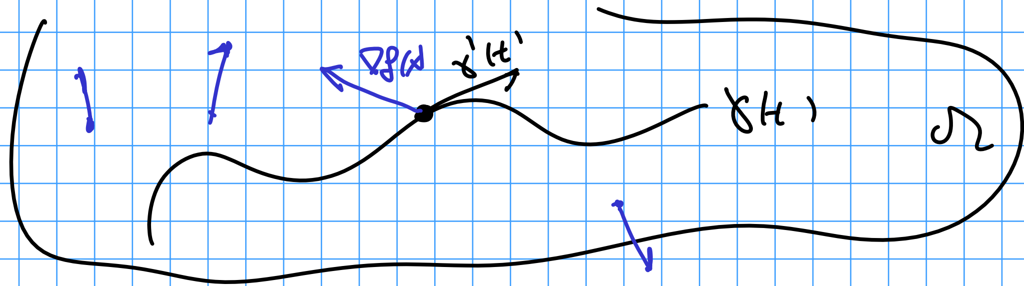
posso considerare $g(t) = f(\gamma(t))$ ("f sulla curva γ")

$g : [a, b] \to \mathbb{R}$. ALLORA, per quanto visto

$$\frac{d}{dt} g(t) \left(= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{UNA SOLA COMPONENTE} \\ \text{UNA SOLA VARIABILE}}}{\frac{d}{dt_1} g_1(t)} \right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \frac{\partial \gamma_k}{\partial t_1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}}{\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)) \gamma_k'(t)}$$

(uso ★ con $K = N = 1$)

DUNQUE $\boxed{\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}$!!!



INTEPRETAZIONI DELLA FORMULA

- LA (!!!) generalizza la derivata direzionale.

RICORDIAMO che $\quad f'(x_0)(\vec{v}) = \frac{d}{dt} f(x_0 + t\vec{v})\Big|_{t=0}$

se chiamo $\gamma(t) := x_0 + t\vec{v}$ ho che $\gamma'(t) = \vec{v}$ $\left(, \gamma(0) = x_0\right)$

e quindi (!!!) mi dice che

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + t\vec{v}) = \nabla f(x_0 + t\vec{v}) \cdot \vec{v} \qquad \forall t$$

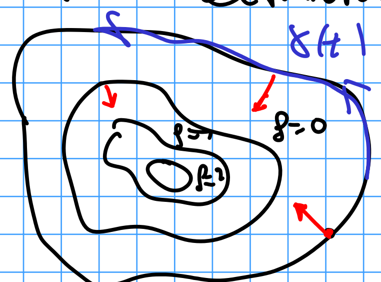
se metto $t=0$ $\quad f'(x_0)(\vec{v}) = \nabla f(x_0) \cdot \vec{v}$

(cosa che avevamo già detto)

- Se considero una "superficie di livello" cioè

$$\{ x \in \Omega : f(x) = c \} \qquad \text{dato } c \in \mathbb{R}$$

se siamo in $\mathbb{R}^2$, la chiamo "curva di livello" – pensare alle linee altimetriche su una mappa



Se so che $\gamma(t)$ "viaggia su una superficie di livello" vuol dire che $f(\gamma(t)) = c$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$$

SE γ si trova in una superficie di livello $\Rightarrow$

$\gamma'(t)$ è perpendicolare a $\nabla f(\gamma(t))$