Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 16 07/11/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Oss. Se $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a,b[$ allora

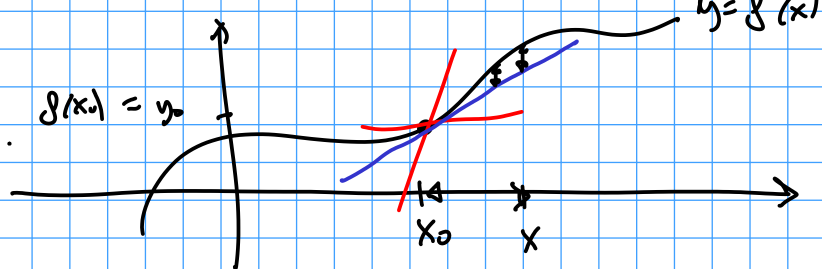
$\exists f'(x_0) \iff$ esiste la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ e cioè la retta di eq.

$$r(x) \quad \underbrace{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{(*)}$$

La retta $(*)$ è l'unica retta $r(x) = y = f(x_0) + m_0 (x - x_0)$

per cui $\quad f(x) = r(x) + o(x - x_0) \iff$

$$\frac{f(x) - r(x)}{x - x_0} \to 0 \qquad \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \right)$$



QUESTA IDEA È LA MOTIVAZIONE PER LA **DEF.**:

Def. (differenziale). $f: \Omega \to \mathbb{R}^N$ $\quad \Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto $\quad x_0 \in \Omega$.

Inoltre prendiamo $L: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ lineare,

Dico che L è (un) differenziale per f in x_0 se

$$(✪) \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\| x - x_0 \|} = 0$$

NUMERATORE $\in \mathbb{R}^M$

DENOMINATORE $\in \mathbb{R}$

Se esiste un tale L dico che f è differenziabile in x_0.

IDEA: L approssima $f(x) - f(x_0)$ a meno di $o(\| x - x_0 \|)$

(✪) si può scrivere $\quad f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(\| x - x_0 \|)$

$\simeq$ L è la migliore approssimazione lineare di $f(x)-f(x_0)$

ESEMPIO torna a $f(x,y) = xy$ $\quad P_0 = (1,2)$

Vediamo se f è differenziabile in P_0. Dobbiamo chiederci se $\exists\ L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, L lineare tale che

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy - 1\cdot 2 - L(x-1, y-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} = 0$$

Se $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è lineare $L(v_1, v_2) = \alpha v_1 + \beta v_2$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (cioè L è una matrice 1×2 $[\alpha, \beta]$ e

$$L(v_{1,2}) = [\alpha, \beta]\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \alpha v_1 + \beta v_2$$

IL PROBLEMA DIVENTA DI CAPIRE SE CI SONO $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{xy - 2 - \alpha(x-1) - \beta(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} \xrightarrow{(x,y)\to(1,2)} 0$$

Per individuare i possibili α, β faccio i limiti sulle restrizioni $x=1$ / $y=2$. Se il limite doppio è zero, in particolare

$$\frac{y - 2 - \beta(y-2)}{|y-2|} \xrightarrow{y\to 2} 0 \iff \frac{(y-2)(1-\beta)}{|y-2|} \to 0$$

$\Rightarrow \boxed{\beta = 1}$ (altrimenti il limite non fa zero dato che $\frac{y-2}{|y-2|} = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$)

Se faccio l'altra restrizione $y=2$ trovo

$$\frac{2x - 2 \quad \alpha(x-1)}{|x-1|} \xrightarrow{x\to 1} 0 \iff \frac{(2-\alpha)(x-1)}{|x-1|} \to 0$$

$\iff \boxed{\alpha = 2}$

DUNQUE L'UNICO L POSSIBILE ha $\alpha=2$ e $\beta=1$

Vediamo ora se il limite originale in $(x,y)\to(1,2)$ fa zero

$$\frac{xy-2-2(x-1)-1(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} \longrightarrow 0 \quad ??$$

$$\frac{(x-1+1)(y-2+2)-2-2(x-1)-(y-2)}{\|(x-1),(y-2)\|} \longrightarrow 0$$

chiamo $x-1=\xi$ $\quad y-2=\eta$ (cambio di variabile)

$$\frac{(\xi+1)(\eta+2)-2-2\xi-\eta}{\|(\xi,\eta)\|} \xrightarrow{(\xi,\eta)\to(0,0)} 0$$

$$\frac{\xi\eta+\cancel{2\xi}+\cancel{\eta}+\cancel{2}-\cancel{2}-\cancel{2\xi}-\cancel{\eta}}{\|(\xi,\eta)\|} \xrightarrow{(\xi,\eta)\to(0,0)} 0$$

$$0=\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)}\frac{\xi\eta}{\|(\xi,\eta)\|}=\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)}\frac{\xi\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

IL LIMITE FA EFFETTIVAMENTE ZERO PERCHÉ

$$\left|\frac{\xi\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right| \le \frac{1}{2}\frac{\xi^2+\eta^2}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}=\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{2} \xrightarrow{(\xi,\eta)\to(0,0)} 0$$

$$|ab|\le\frac{a^2+b^2}{2}$$

DUNQUE f è differenziabile in $(1,2)$ e l'unico differenziale è $L(v_1,v_2)=2v_1+v_2$

PROP Se f è diff. in x_0 $\Rightarrow$ f è continua in x_0

DIM. So che $\Delta(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)}{\|x-x_0\|} \longrightarrow 0$ (per ipotesi)

Esprimo $f(x)$ in termini di $\Delta(x)$:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{L(x-x_0) + \Delta(x)\,\|x-x_0\|}_{\text{TENDE A ZERO SE } x\to x_0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

<u>TEOREMA</u> (differenziabilità e derivate direzionali).

f, Ω, x_0 come sopra.

Se f è differenziabile in x_0 e se L è un differenziale

$\Rightarrow$ $\exists$ $f'(x_0)(\vec{v})$ per ogni $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ e vale la formula

$$f'(x_0)(\vec{v}) = L\vec{v} \qquad (\leftarrow \text{OVVIA SE } \vec{v} = 0)$$

<u>Dim</u> In effetti se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = 0$$

e se $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{v} \neq 0$, allora (uso il limite della restrizione $x = x_0 + t\vec{v}$)

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t\vec{v}) - f(x_0) - tL\vec{v}}{\|t\vec{v}\|} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{\|\vec{v}\|} \underbrace{\lim_{t\to 0^+} \left(\frac{f(x_0+t\vec{v}) - f(x_0)}{t} - L\vec{v} \right)}_{\text{questo deve fare zero}} = 0$$

$$\underbrace{f(x) = f(x_0) + L(x-x_0) + \Delta(x)\,\|x - x_0\|}_{\text{TENDE A ZERO SE } x \to x_0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

TEOREMA (differenziabilità e derivate direzionali).

f, Ω, x_0 come sopra.

Se f è differenziabile in x_0 e se L è un differenziale

$\Rightarrow$ $\exists\, f'(x_0)(\vec{v})$ per ogni $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ e vale la formula

$$f'(x_0)(\vec{v}) = L\vec{v} \qquad (\leftarrow \text{OVVIA SE } \vec{v} = 0)$$

Dim In effetti se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x-x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

e se $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{v} \neq 0$, allora (uso il limite sulla restrizione $x = x_0 + t\vec{v}$)

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0) - tL\vec{v}}{\|t\vec{v}\|} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{\|\vec{v}\|} \underbrace{\lim_{t\to 0^+} \left(\frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)}{t} - L\vec{v} \right)}_{\text{questo deve fare zero}} = 0$$

ALLORA Se f è diff. in x_0

$$df(x_0)(\vec{v}) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)}_{\in \mathbb{R}^M} v_1 + \quad + \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0) v_N$$

$\vec{v} = (v_1 \dots v_N)$ $\qquad (\in \mathbb{R}^M)$

$f : \Omega \to \mathbb{R}^M \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto $\qquad x_0 \in \Omega$

- Differenziale $df(x_0)$ l'unico opp lineare da $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ (SE ESISTE) tale che

$$\frac{1}{\|x-x_0\|}\left(f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x-x_0)\right) \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

- Se $\exists\, df(x_0)$ (f è differenziabile) allora

$$df(x_0)\vec{v} = f'(x_0)(\vec{v}) \qquad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$$

Def. Chiamo "derivate parziali" di f in x_0

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := f'(x_0)(\hat{e}_i) \qquad \hat{e}_i = (0 \dots \underset{\uparrow\, i}{1} \dots 0)$$

DUNQUE se f è differenziabile $\qquad (\vec{v} = (v_1, \dots, v_N))$

$$\left(f'(x_0)(\vec{v}) =\right) df(x_0)(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) v_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N} v_N$$

Se so che f è diff. MI BASTANO le derivate parziali

Def. Se $\exists\, df(x_0)$ $(\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M)$ la posso rappresentare con una matrice $M \times N$ (prendendo le BASI CANONICHE in $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^M$)

che chiamo "MATRICE JACOBIANA" di f in x_0 e indico con

$$J_f(x_0) \quad \text{o anche} \quad \frac{\partial(f_1 \ldots f_M)}{\partial(x_1 \ldots x_N)}(x_0)$$

$J_f(x_0)$ ha la proprietà

$$df(x_0)\vec{v} = \underbrace{\overset{M\times N}{J_f(x_0)}\ \vec{v}}_{\text{PRODOTTO TRA MATRICI}}$$

deve essere una matrice $N\times 1$ (COLONNA)

COME È FATTA $J_f(x_0)$?

$$J_f(x_0) = \left[\, df(x_0)\hat{e}_1 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, df(x_0)\hat{e}_N \,\right] =$$

vettori di $\mathbb{R}^M$

VETTORI DI $\mathbb{R}^M$

$$\left[\, f'(x_0)\hat{e}_1 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, f'(x_0)\hat{e}_N \,\right] = \left[\, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial x_N} \,\right]$$

$$f = (f_1 \ldots f_M) \quad \text{dunque} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial f_M}{\partial x_i} \right]^T$$

TRASPOSTO

IN DEFINITIVA

$$J_f(x_0) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_i} & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1} & \frac{\partial f_M}{\partial x_i} & \frac{\partial f_M}{\partial x_N} \end{bmatrix}}_{M \times N}$$

$$\boxed{\text{CIOÈ} \quad J_f(x_0)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)}$$

NEL CASO IN CUI $M = 1$ $(f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R})$

CHIAMO "GRADIENTE" di f in x_0 il $\boxed{\text{vettore}}$ $\in \mathbb{R}^N$

$$\nabla f(x_0) = J_f(x_0)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

CON QUESTE DEF. posso dire: se f è differenziabile

PRODOTTO TRA MATRICI

$$f(x) = f(x_0) + J_f(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \qquad (\in \mathbb{R}^m)$$

o anche, nel caso reale:

PRODOTTO SCALARE

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \qquad (\in \mathbb{R})$$

COME INTERPRETO IL GRADIENTE. So che

$$(\bullet) \quad f'(x_0)(\vec{v}) = \underbrace{\nabla f(x_0) \cdot \vec{v}}_{df(x_0)\vec{v}} \quad (df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$$

Prendiamo $\vec{v}$ con $\|\vec{v}\| = 1$ ALLORA (Schwartz)

$$f'(x_0)(\vec{v}) \leq \|\nabla f(x_0)\| \cdot \|\vec{v}\| = \|\nabla f(x_0)\|$$

Se $\nabla f(x_0) = \vec{0} \Rightarrow f'(x_0)(\vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v}$. Supponiamo che $\nabla f(x_0) \neq \vec{0}$. Allora posso scegliere $\hat{v} = \dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$

$$\Rightarrow f'(x_0)(\hat{v}) = \frac{\overbrace{\nabla f(x_0) \cdot \nabla f(x_0)}^{\|\ \|^2}}{\|\nabla f(x_0)\|} = \|\nabla f(x_0)\|$$

<u>DUNQUE</u> $\quad \|\nabla f(x_0)\| = \max\limits_{\vec{v} \in S(0,1)} f'(x_0)(\vec{v})$

$$S(0,1) = \{\|v\| = 1\}$$

INOLTRE LA DIREZIONE $\dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ è la "direzione" su cui $f'(x_0)(\vec{v})$ è massima.
(se $\nabla f \neq 0$)

TUTTO CIO' CHE ABBIAMO DETTO VALE SE $\exists\, df(x_0)$

TEOREMA (DEL DIFFERENZIALE TOTALE) Se f ammette derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ ($i=1..N$) $\forall x \in$ UN intorno di x_0 e se $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ sono <u>continue</u> in x_0 $\Rightarrow$ f è differenziabile in x_0

$(C^1(\Omega))$

DEF- Dico che f è di classe C^1 in Ω se esistono <u>CONTINUE</u> $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \to \mathbb{R}^M$.

Per il teorema sopra, $f \in C^1(\Omega) \Rightarrow f$ differenziabile $\forall x \in \Omega$

DIM. Faccio la dim. quando $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\Omega \in \mathbb{R}^2$

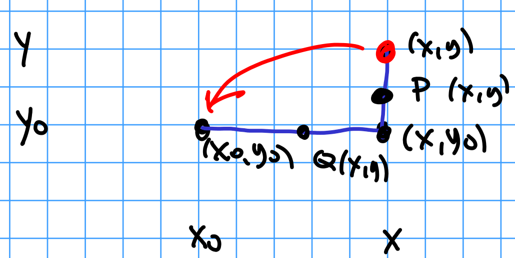
IN QUESTO CASO CHIAMO (x,y) le variabili (invece di (x_1,x_2))

Ho $(x_0,y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}$ so che:

$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ continue in (x_0,y_0)

Devo dim. che $\frac{f(P)-f(P_0)-df(P_0)(P-P_0)}{\|P-P_0\|}$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\overbrace{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}^{\Delta(x,y)}}{\|(x-x_0,\ y-y_0)\|} = 0$$



$$\boxed{\begin{aligned} P(x,y) &= (x,\ \eta(x,y)) \\ Q(x,y) &= (\xi(x,y),\ y_0) \end{aligned}}$$

Vediamo il numeratore:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0) = \overbrace{f(x,y)-f(x,y_0)}^{1} + \overbrace{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}^{2}$$

USO LAGRANGE NELLA Y

$1 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\ \eta(x,y))(y-y_0)$ dove η compreso tra y e y_0

USO LAGRANGE NELLA x

$$② = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(x,y), y_0)(x-x_0) \qquad \text{dove } \xi \text{ compreso tra } x \text{ e } x_0$$

RIMETTIAMO TUTTO INSIEME

$$\frac{\Delta(x,y)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(P(x,y)) - \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right)(y-y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(Q(x,y)) - \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\right)(x-x_0)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|}$$

IL NUM È prodotto scalare tra $\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(Q) - \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(P) - \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \end{pmatrix}}$ e $\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ per Schwarz:

$$\frac{|\Delta(x,y)|}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} \leq \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(Q) - \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(P) - \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right)^2}}_{\text{TENDE A ZERO}} \; \frac{\cancel{\|(x-x_0, y-y_0)\|}}{\cancel{\|(x-x_0, y-y_0)\|}}$$

TENDE A ZERO PERCHÉ, se $(x,y) \to (x_0, y_0) = P_0$

$P(x,y) \to P_0 \quad Q(x,y) \to P$

e dunque $\frac{\partial f}{\partial x}(Q(x,y)) \to \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ e

$\frac{\partial f}{\partial y}(P(x,y)) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ #

UN PO' DI ESEMPI

① . RIVEDIAMO L'ESEMPIO DI IERI

$$f(x,y) = xy \qquad P_0 = (1,2)$$

AVEVAMO VISTO (USANDO LA DEF.) CHE f è diff. in P_0

e che $df(P_0)(v_1,v_2) = 2v_1 + v_2$.

Lo stesso risultato si ottiene subito dal th. del diff. tot.

CALCOLIAMO LE DERIVATE PARZIALI

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$$

CONTINUE

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1 \right)$$

$\Longrightarrow$ f è diff. in $(1,2)$ e

$$df(1,2)(v_1,v_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)v_2 = 2v_1+v_2$$

Ad esempio: $f'(1,2)(3,5) = 2\cdot 3+5 = 11$

ESEMPIO

$$f(x,y) = \frac{x y^{\alpha}}{x^2+y^2} \quad \text{se } (x,y)\neq(0,0) \qquad \alpha > 0$$

$$f(0,0) = 0$$

MI CHIEDO PER QUALI α (se ce ne sono) la f è diff. in $(0,0)$

Comincio a cercare di di dim. che f è diff. in $(0,0)$ (e vedo cosa mi implica su α) USO LA DEF. DI DIFFERENZIAB.

NOTO che $f(x,y) = 0$ se $x=0$ $(\forall y)$, se $y=0$ $(\forall x)$ $\Longrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0 \quad (\forall y) \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0 \quad (\forall x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

DUNQUE se f è diff $\Longrightarrow$ $df(0,0) = 0$ $\left(\text{CIOE' } df(0,0)(v) = 0 \ \forall v\right)$

e allora

$$f \text{ è diff.} \iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \overset{=0}{f(0,0)} - \overset{=0}{0(x-0)} - \overset{=0}{0(y-0)}}{\|(x-0,y-0)\|} = 0$$

$$\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x\, y^{\alpha}}{\|(x,y)\|(x^2+y^2)} \right| = 0$$

$$\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|\,|y|^{\alpha}}{\underbrace{(x^2+y^2)^{3/2}}_{=\|(x,y)\|^3}} = 0$$

Posso maggiorare $|x| \le \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$

$$|y|^{\alpha} \le \|(x,y)\|^{\alpha}$$

MI RITROVO $(\ast) \le \dfrac{\|(x,y)\|^{1+\alpha}}{\|(x,y)\|^3} \xrightarrow{\text{SE } \alpha>2} 0$

VEDO CHE $\boxed{\text{se } \alpha > 2 \Rightarrow f \text{ è differenziabile}}$

Vediamo che per $\alpha \le 2$ f NON è DIFF. . METTO $\alpha = 2$

$$\frac{x\, y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \qquad \text{metto } y = mx \ \to$$

$$\frac{x\, m^2 x^2}{(x^2+m^2x^2)^{3/2}} = \frac{x^3\, m^2}{x^3(1+m^2)} = \frac{m^2}{1+m^2} \ \cancel{\to 0}$$

QUINDI NON È DIFF. se $\alpha = 2$. Facciamo le derivate direzionali

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = \lim \frac{1}{t} \underbrace{\frac{t\, v_1\, t^2 v_2^2}{t^2(v_1^2+v_2^2)}}_{f(tv_1,tv_2)} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2+v_2^2}$$

$$f'(0,0)(v_1,v_2) = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2+v_2^2} \qquad \text{NON È LINEARE IN } v$$

HO TROVATO UN ALTRO MOTIVO PER CUI NON È DIFF.

. Se $\alpha < 2$ vedete che $\nexists\ f'(0,0)(v)$ -- TANTO PEGGIO

$\boxed{\text{ALLA FINE} \quad f \text{ è diff. in } (0,0) \iff \alpha > 2}$

ESEMPIO $\quad \dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^2} = f(x,y) \quad$ se $(x,y) \neq (0,0)$

$$f(0,0) = 0$$

COME PRIMA si vede che $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

f è diff $\iff \dfrac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} \to 0 \qquad \big($ e $df(0,0) = 0 \big)$

CIOÈ $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$

VERA: $\quad xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2} \Rightarrow x^2 y^2 \leq \dfrac{(x^2+y^2)^2}{4}$

$\Rightarrow \left| \dfrac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right| \leq (x^2+y^2)^{1/2} \longrightarrow 0 \qquad$ TORNA

È DIFF (ho usato la definizione di diff.)

Posso anche usare il diff. TOTALE (MA È PIÙ COMPLICATO ..)

DEVO CALCOLARE $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \qquad (x,y) \neq (0,0)$

e dim che $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

$\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

FANNO ZERO PERCHÉ $f = 0$ sugli assi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} = \frac{2xy^2(\cancel{x^2}+y^2) - 2x\cancel{x^2}y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^4 y}{(x^2+y^2)^2}$$

(fuori da $(0,0)$)

DEVO DIM. CHE

$\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y}{(x^2+y^2)^2} = 0 \quad$ / e stesso per l'altra)

VERO PERCHÉ $x^4 \le \|(x,y)\|^4$
$|y| \le \|(x,y)\|$

$$\left| \frac{x^4 y}{(x^2+y^2)^2} \right| \le \frac{\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} = \|(x,y)\| \to 0$$

TORNA

ESEMPIO $f(x) = \|x\|^p$ $x \in \mathbb{R}^N$

Voglio calcolare il gradiente di f.

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{p}{2}}$$

$x \neq \vec{0}$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \frac{p}{2} \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{p}{2}-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) =$$

$$\frac{p}{2} \|x\|^{p-2}\, 2 x_k = p \|x\|^{p-2} x_k.$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla f(x) = p \|x\|^{p-2} x}. \qquad \left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \right)$$

$x \neq 0$

(f è differenziabile se $x \neq 0 = (0 \dots 0)$)

CHE SUCCEDE IN $x = 0 = (0, \dots 0)$

Mettiamo $\boxed{p = 1}$ $f(x) = \|x\|$; provo a fare le derivate direzionali

$$f'(0)(\vec{v}) \overset{??}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f(tv)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t| \|v\|}{t}$$ NON ESISTE

(cambia se $t \to 0^+$, $t \to 0^-$)

Stesso discorso se $p < 1$ $\left(\left| \frac{f(t v)}{t} \right| \text{ diverge per } t \to 0 \right)$

INVECE se $p > 1$ trovo $f'(0)(\vec{v}) = 0$ $\forall v$

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{\|t\vec{v}\|^p}{t} \right| = \lim_{t \to 0} \left| \frac{|t|^p}{t} \|\vec{v}\| \right| = \lim_{t \to 0} |t|^{p-1} \|\vec{v}\| = 0$$

$\Rightarrow \quad f'(0)(\vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v} \quad ; \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1 \ldots n$

Dato che $\lim_{x \to 0} \nabla f(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{p \|x\|^{p-2} x}_{\| \cdot \| = \|x\|^{p-1} \to 0} = 0$

DUNQUE se $p > 1$ $f(x) = \|x\|^p$ è diff anche in 0 e
$df(0) = 0$

#

PROPOSTA DI COMPITINO

GIOVEDÌ 18 al pomeriggio su TEAMS

o GIOVEDÌ 25 ??