Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 15 02/11/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

"DERIVAZIONE" IN PIÙ VARIABILI

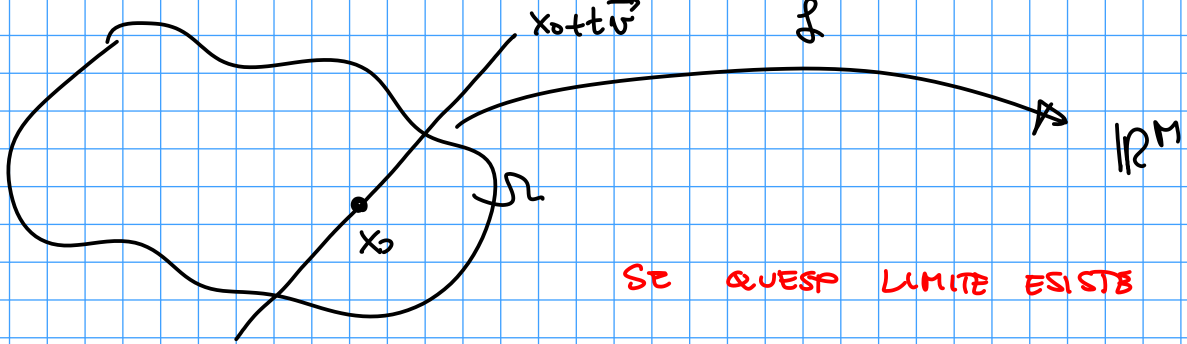
$f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ $\quad \underline{\Omega \subset \mathbb{R}^N}$ $\quad \Omega$ aperto $\quad x_0 \in \Omega$

(90% così $M = 1$)

Def. (DERIVATE DIREZIONE) Dato $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ chiamo derivata di f in x_0 lungo la direzione $\vec{v}$

$$f'(x_0)(\vec{v}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)}{t} \quad \left(= \lim \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0) \right)$$

(cioè la derivata della funzione $\varphi(t) = f(x_0 + tv)$ in $t = 0$



SE QUESTO LIMITE ESISTE

ESEMPI (1)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

MI METTO NEL PUNTO $(0,0)$ e mi chiedo se $\exists$

$f'(0,0)(v_x, v_y)$ $\quad \vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$ assegnato

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(tv_x, tv_y) - \overset{0}{f(0,0)}}{t} = \quad \text{se } (v_x,v_y) \neq (0,0)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{tv_x\, tv_y}{t^2 v_x^2 + t^2 v_y^2}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t^2} v_x v_y}{t^{\cancel{3}} (v_x^2 + v_y^2)} = \begin{cases} 0 & \text{se } v_x v_y = 0 \\ \text{NON ESISTE} \end{cases}$$

DUNQUE $f'(0,0)(\vec{v})$ esiste se e solo se $\vec{v} = (v_x, 0)$ oppure $\vec{v} = (0, v_y)$

ESEMPIO (2)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Fissiamo $\vec{v} = (v_x, v_y) \neq (0,0)$ e vediamo se esiste

$$f'(0,0)(\vec{v}) = \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{t^3 v_x v_y^2}{t^2(v_x^2 + t^2 v_y^4)}}_{\frac{f(t\vec{v})}{t}} = \lim_{t \to 0} \boxed{\frac{v_x v_y^2}{v_x^2 + t^2 v_y^4} = \begin{cases} \dfrac{v_y^2}{v_x} & \text{se } v_x \neq 0 \\ 0 & \text{se } v_x = 0 \end{cases}}$$

IN QUESTO CASO $f'(0,0)(\vec{v})$ esiste per ogni $\vec{v}$!!

OSSERVIAMO CHE f NON È CONTINUA IN $(0,0)$ (GIÀ VISTO)

IN EFFETTI $\lim_{t \to 0} f(t\vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v}$ (sulle rette $f \to 0$)

però se calcolo $\lim_{y \to 0} f(y^2, y) = \lim_{y \to 0} \dfrac{y^4}{2y^4} = \dfrac{1}{2} \neq 0$

DUNQUE l'esistenza di tutte le derivate direzionali in x_0

NON IMPLICA f è continua in x_0

OSS. (1) se $\vec{v} = 0$ $\quad f'(x_0)(\vec{v}) = 0$ (qualunque sia f)

(2) se $\exists\, f'(x_0)(\vec{v})$ allora esiste

$$f'(x_0)(\lambda \vec{v}) = \lambda f'(x_0)(\vec{v}) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

per questo basta osservare che, se $\lambda \neq 0$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\lambda\vec{v}) - f(x_0)}{t} = \lambda \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t\lambda\vec{v}) - f(x_0)}{t\lambda} =$$

(cambio di variabile $s = t\lambda$, $s \to 0$ se $t \to 0$) $= \lambda \lim_{s\to 0} \dfrac{f(x_0 + s\vec{v}) - f(x_0)}{s} = \lambda f'(x_0)\vec{v}$

DUNQUE SONO "INTERESSANTI" $f'(x_0)(\vec{v})$ se $\|\vec{v}\| = 1$

(3) $f'(x_0)(\vec{v})$ IN GENERALE **NON** È LINEARE in $\vec{v}$

come mostra il secondo esempio

Def. Chiamo *derivata parziale i-esima*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := f'(x_0)(\hat{e}_i) \qquad \hat{e}_i = (0 \dots \overset{i}{1} \dots 0)$$

= derivata di f rispetto a x_i "tenendo fermo x_j con $j \neq i$)

(per esempio se $f(x,y) = xy^2 \Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$$

vediamo che $y^2 = f'((x,y))(1,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{(x+t)y^2 - xy^2}{t} = y^2$

$\dots\ 2xy = f'((x,y))(0,1) = \lim_{t\to 0} \dfrac{x(y+t)^2 - xy^2}{t}$

ES (3)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{|x|}\, y^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Prendo $\vec{v} = (v_x, v_y)$ e cerco $f'(0,0)(\vec{v}) =$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \, \frac{t^3 \sqrt{|t|}\, v_x \sqrt{|v_x|}\, v_y^2}{t^2(v_x^2 + t^2 v_y^4)} = 0 \qquad \forall (v_x, v_y)$$

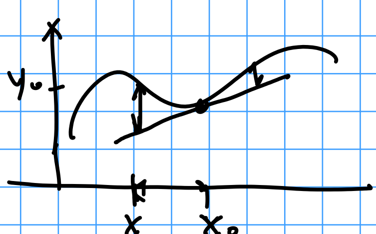
DUNQUE $f'(0,0)(v_x, v_y) = 0 \qquad \forall (v_x, v_y)$

Stavolta f è continua perché

$$|f(x,y)| \leq \sqrt{|x|}\, \frac{\frac{x^2+y^4}{2}}{x^2+y^4} = \sqrt{|x|} \to 0 \quad \text{se } (x,y)\to(0,0)$$

RICORDIAMO CHE, IN UNA VARIABILE, l'esistenza di $f'(x_0)$ assicura l'esistenza della retta tangente, di equazione

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad y_0 = f(x_0) \quad m = f'(x_0)$$



$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

$\uparrow$

è caratterizzata dalla seguente proprietà

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(|x - x_0|)$$

$$\left(\left| \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| \xrightarrow{x \to x_0} 0 \right)$$

VORREI DIRE UNA COSA ANALOGA IN PIÙ VARIABILI

I CASO $n = 1$ $\quad f: \Omega \to \mathbb{R}$

? QUANDO $\exists$ un piano di eq.

$$z = a_1(x_1 - x_{0,1}) + \cdots + a_N(x_N - x_{0N}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_N \end{pmatrix} \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0)$$

($z = a(x - x_0) + b(y - y_0)$ se $N = 2$)

UN PIANO IN $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ è dato da

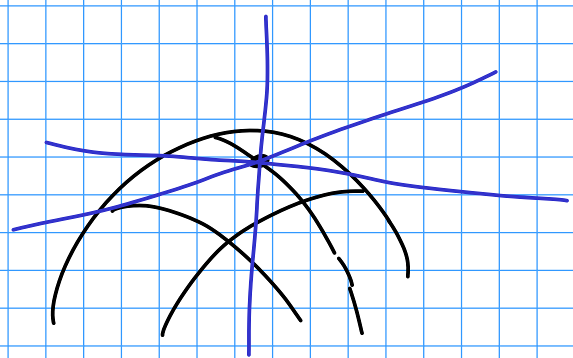
$$\boxed{y = \vec{a} \cdot (x - x_0)}$$

$x \in \mathbb{R}^N$ $\vec{a} \in \mathbb{R}^N$ FISSATO

DIREMO che $y = \vec{a} \cdot (x - x_0)$ è l'eq del piano tangente al grafico di f nel punto (x_0, y_0) $x_0 \in \Omega$ $y_0 = f(x_0)$

SE $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \vec{a} \cdot (x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

($f(x) = f(x_0) + \vec{a} \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$



CONTINUA