Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 14   31/10/2022

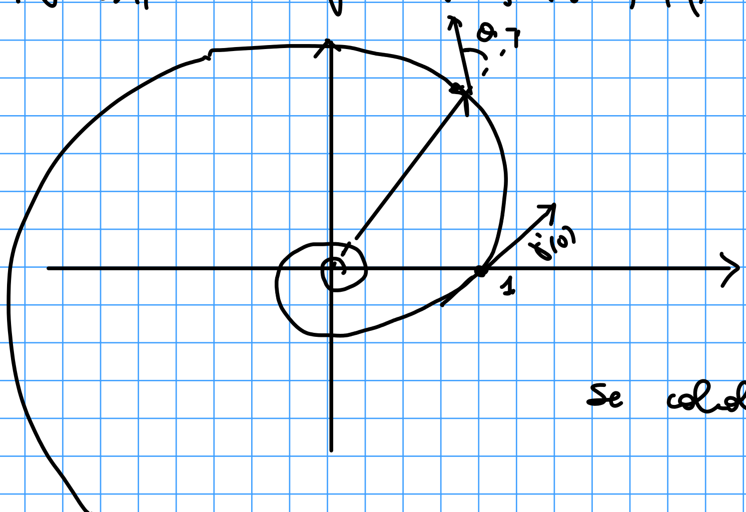
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

SPIRALE LOGARITMICA $\gamma(t) = e^{at}(\cos(t), \sin(t))$. γ è C^1

$$\gamma'(t) = a\,e^{at}(\cos(t), \sin(t)) + e^{at}(-\sin(t), \cos(t))$$

$$\|\gamma'(t)\| = e^{at}\sqrt{a^2(\cos^2+\sin^2) + (\sin^2+\cos^2(t))} = e^{at}\sqrt{a^2+1}$$ γ è regolare



$\gamma(0) = (1, 0)$

$\gamma'(0) = (a, 1)$

Se calcolo $\dfrac{\gamma(t)\cdot\gamma'(t)}{\|\gamma(t)\|\,\|\gamma'(t)\|}$ trovo

ortogonale a γ

$$\frac{e^{at}(\cos t, \sin t)}{e^{at}} \cdot \left[\frac{a\,e^{at}(\cos t, \sin t) + e^{at}(-\sin t, \cos t)}{e^{at}\sqrt{a^2+1}}\right] =$$

$$\frac{a\,e^{2at}}{\sqrt{a^2+1}\;e^{2at}} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

Dunque l'angolo θ tra $\gamma(t)$ e $\gamma'(t)$ è costante e si ha $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

$$\left(\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{a^2}{1+a^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{a^2+1}{a^2} \Leftrightarrow 1+\tan^2(\theta) = 1+\frac{1}{a^2} \Leftrightarrow \right.$$

$$\tan^2(\theta) = \frac{1}{a^2} \quad (\ldots) \quad \tan\theta = \frac{1}{a}$$

<u>LUNGHEZZA tra $-\infty$ e 0</u>

$$\int_{-\infty}^{0} \|\gamma'(t)\| dt = \sqrt{1+a^2} \int_{-\infty}^{0} e^{at} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \left[e^{at}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \quad \left(= \frac{1}{\cos\theta} \ldots \right)$$

<u>CENTRO</u>

$$\frac{1}{\ell(\gamma)} \int_\gamma x \, ds = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \int_{-\infty}^{0} e^{at}\cos(t)\, e^{at} \sqrt{1+a^2}\, dt =$$

$$a \int_{-\infty}^{0} e^{2at} \cos(t)\, dt = a \int_{-\infty}^{0} \mathrm{Re}\left(e^{2at+it}\right) dt = a\,\mathrm{Re} \int_{-\infty} e^{(2a+i)t} dt =$$

$$a\,\mathrm{Re}\left[\frac{e^{(2a+i)t}}{2a+i} \right]_{-\infty}^{0} = a\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2a+i}\right) = a\,\mathrm{Re}\left(\frac{2a-i}{4a^2+1}\right) =$$

← in $-\infty$ il limite è zero dato l'esponenziale negativo

$$\frac{2a^2}{4a^2+1}$$

Noto che, con gli stessi calcoli

$$\frac{1}{\ell(\gamma)} \int_\gamma y \, ds = a \int_{-\infty}^{0} e^{2at} \sin(t)\, dt = a\, \mathrm{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(2a+i)t} = \frac{-a}{4a^2+1}$$

DUNQUE le coordinate del centro sono $x = \dfrac{2a^2}{4a^2+1}$ $\quad y = \dfrac{-a}{4a^2+1}$

INTEGRALI DI II^a SPECIE

<u>Def.</u> $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ di classe C^1. $S :=$ sostegno di γ.

$\vec{f} : S \to \mathbb{R}^N$ continua ("UN CAMPO VETTORIALE").

Definisco

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Più in generale se γ è C^1 a tratti, cioè se $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$

e se la restrizione di γ su $[t_{i-1}, t_i]$ è C^1 allora

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} := \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

<u>IDEA:</u> $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$ è il "lavoro" della forza $\vec{f}$ sulla curva

<u>FATTI</u>

- $\int_\gamma (\lambda_1 \vec{f}_1 + \lambda_2 \vec{f}_2) \cdot d\vec{s} = \lambda_1 \int_\gamma \vec{f}_1 \cdot d\vec{s} + \lambda_2 \int_\gamma \vec{f}_2 \cdot d\vec{s}$
- $\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}$
- Se $\varphi : [a_1, b_1] \to [a, b]$ è un cambio di parametro e $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$ allora

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} \quad \text{se } \varphi \text{ crescente } (\Leftrightarrow \varphi(a_1) = a,\ \varphi(b_1) = b)$$

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\int_\gamma \vec{f}\, ds \quad \text{se } \varphi \text{ decrescente } (\Leftrightarrow \varphi(a_1) = b,\ \varphi(b_1) = a)$$

(in particolare $\int_{\tilde{\gamma}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$)

<u>ESEMPIO</u> $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \qquad 0 \le t \le 2\pi$

$$\vec{f}(x, y) = (3x - y,\ x + y)$$

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (3\cos(t) - \sin(y),\ \cos(t) + \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t))\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-3\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t) + \sin(t)\cos(t))\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t))\, dt = \int_0^{2\pi} (-2\sin(2t) + 1)\, dt =$$

$$\left[\cos(2t)\right]_0^{2\pi} + 2\pi = 2\pi$$

APPROCCIO ALTERNATIVO: CURVE COME SOTTOINSIEMI

Def. $S \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme. Dico che S è una curva semplice se $\exists\ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ di classe C^1 tale che

- γ è iniettiva
- $\gamma([a,b]) = S$
- $\gamma'(t)$ $\forall t \in [a,b]$

Dunque γ è una curva regolare che ha come sostegno S e inoltre γ è bigettiva tra $[a,b]$ ed S.
Una tale γ si chiama "parametrizzazione" per S.

Fatto Se S è una curva semplice sono definiti gli estremi di S $P = \gamma(a)$ e $Q = \gamma(b)$.
SI DIMOSTRA (facilmente) che se γ_1 è un altra parametrizzazione allora $\gamma_1(a_1) = P$ o Q, $\gamma_1(b_1) = P$ o Q
Dunque gli estremi di S sono ben definiti MA NON È DEFINITO il primo/secondo estremo.

Def. $S \subset \mathbb{R}^N$ sottoinsieme. $\vec{v} : S \to \mathbb{R}^N$ $\vec{v}$ continua e $\|\vec{v}\| = 1$. Dico che $(S, \vec{v})$ è una curva semplice orientata se esiste $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ C^1 con le stesse proprietà di prima:

- γ iniettiva, $\gamma([a,b]) = S$,

E
$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \vec{v}(\gamma(t)) \quad \forall\ t \in [a,b]$$

Dico che γ è una parametrizzazione per S concorde con $\vec{v}$.
DUNQUE UNA CURVA SEMPLICE ORIENTATA È UNA CURVA SEMPLICE CON UNA SCELTA DELLA DIREZIONE DEL VETTORE TANGENTE.

SI VEDE CHE SE $(\gamma, \vec{v})$ è come sopra allora sono ben definiti l'estremo destro $P = \gamma(a)$ e l'estremo sinistro $Q = \gamma(b)$. Infatti se $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to S$ è un'altra parametrizzazione "concorde con $\vec{v}$" (cioè $\gamma' \cdot \gamma' > 0$), allora $\gamma_1(a_1) = \gamma(a) = P$, $\gamma_1(b_1) = \gamma(b) = Q$.

Def. Se S è una curva semplice e $f : S \to \mathbb{R}$ continua allora
$$\int_S f \, ds := \int_\gamma f \, ds \quad \left(= \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt\right)$$
dove γ è una qualunque parametrizzazione di S.

SI VEDE CHE $\int_S f \, ds$ <u>NON</u> DIPENDE DA γ

Def. Se $(S, \vec{v})$ è una curva sempl. orientata e $\vec{f} : S \to \mathbb{R}^N$ continua allora
$$\int_S \vec{f} \cdot d\vec{s} := \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} \quad \left(= \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt\right)$$
dove γ è una qualunque parametrizzazione di S concorde con $\vec{v}$

SI VEDE CHE $\int_S \vec{f} \cdot d\vec{s}$ <u>NON</u> DIPENDE DA γ (concorde)

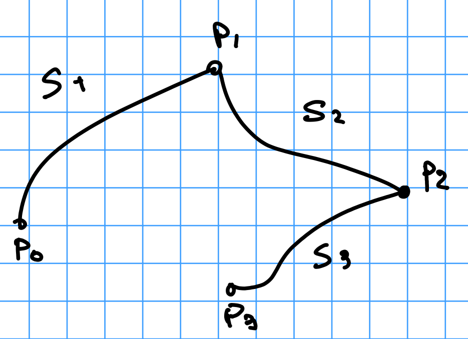
VALGONO LE STESSE PROPRIETÀ DETTE CON L'ALTRA DEF. DI CURVA

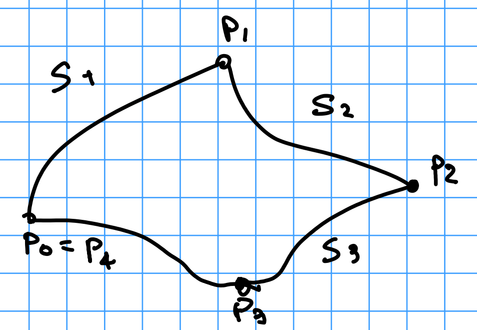
- $$\int_S (\lambda f + \mu g) \, ds = \lambda \int_S f \, ds + \mu \int_S g \, ds$$

- $$\int_S (\lambda \vec{f} + \mu \vec{g}) \cdot d\vec{s} = \lambda \int_S \vec{f} \cdot d\vec{s} + \mu \int_S \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

Def. $S \subset \mathbb{R}^N$. Dico che S è una "curva generale" se esistono $S_1, \dots, S_K$ curve semplici e $P_0, P_1 \dots P_K$ punti in $\mathbb{R}^N$ tali che

- $S = S_1 \cup \dots \cup S_K$, $P_0, P_1 \dots P_{K-1}$ sono tutti diversi,
- gli estremi di S_i sono P_{i-1}, P_i $i = 1 \dots K$,
- Se $i \neq j \Rightarrow S_i$ e S_j si intersecano, al più, agli estremi





Se $P_0 \neq P_K$ dico che P_0 e P_K sono gli estremi di S, se $P_0 = P_K$ dico che S è chiuso e che non ha estremi.

Se $P \in S$ e $P \notin \{P_0, \dots, P_K\}$ è definita in P la retta tangente a S in P come la retta tangente a S_i in P dove S_i è l'unica delle S_i che contiene P.

Dico che $S_1 \dots S_K$ è una Decomposizione di S.

(dati $S_1 \dots S_K \Rightarrow$ i punti $P_0 \dots P_K$ sono automaticamente definiti dalle proprietà sopra).

- Dico che $P \in S$ è regolare se esiste una decomposizione per cui $P \neq P_i$ $i = 0, \dots, k$
- Se $P \in S$ è regolare $\Rightarrow$ è definita la retta tangente $T_S(P)$ come la retta tangente a S_i in P, dove $S_1 \dots S_k$ è una decomposizione per cui $P \neq P_j$ $\forall j$, e i è tale che $P \in S_i$.

Def Se S è una "curva", come nella def. precedente, e se $f : S \to \mathbb{R}$ è continua, definisco

$$\int_S f \, ds := \sum_{i=1}^{K} \int_{S_i} f \, ds$$

dove $S_1 \dots S_K$ è una decomposizione di S. Si dimostra che l'integrale NON DIPENDE dalla decomposizione. (se prendo un'altra decomposizione trovo lo stesso risultato).

Def. Chiamo "curva orientata" una coppia $(S, \hat{v})$ dove

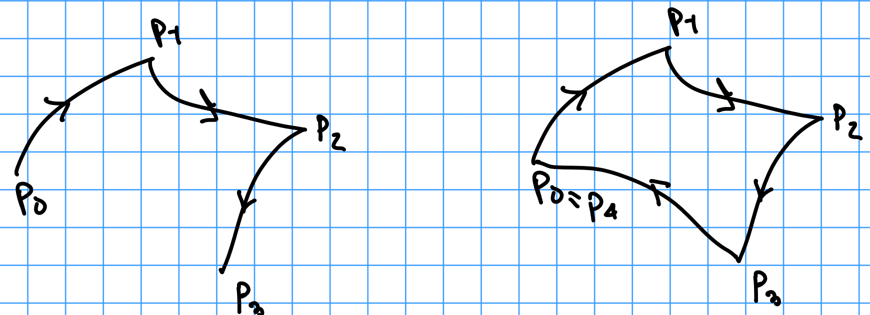
S è una "curva" e $\hat{v}$ è un campo di vettori con $\hat{v} : \{\text{Pti regolari di } S\} \to \mathbb{R}^N$

$\|\hat{v}\| = 1$, $\hat{v}$ è continua, $\hat{v}(p) \in T_S(p)$ e si ha che

$\exists$ una decomposizione $S_1 \dots S_k$, $\exists$ $P_0 \dots P_k$ tali che

P_i = estremo destro di S_i = estremo sinistro di P_{i+1}

dove la nozione di estremo destro e sinistro su S_i è data dalla restrizione di $\hat{v}$ a S_i.



Anche qui se $P_0 \neq P_K$ dico che P_0 è l'estremo sinistro di S e P_K è l'estremo destro di P_K. Se $P_0 = P_K$ dico che S è chiusa e non ha estremi.

Def. Se $(S, \hat{v})$ è una curva orientata, se $\vec{f} : S \to \mathbb{R}^N$ è continua definiamo

$$\int_S \vec{f} \cdot d\vec{s} := \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} \vec{f} \cdot \hat{v} \, ds$$

dove $S_1 .. S_k$ è una decomposizione di S.