Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 13 26/10/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

ESEMPI DI CURVE

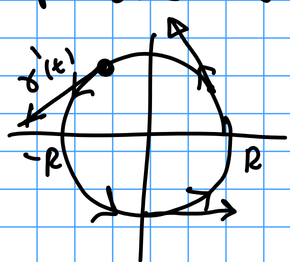
Circonferenza: $\gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$ (in $\mathbb{R}^2$)

al variare di t in $[0, 2\pi]$ γ descrive la circonferenza centrata in $(0,0)$ di raggio R

(sostegno $= \{(x,y) : x^2+y^2 = R^2\}$)

Più in generale $\gamma(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))$ descrive la circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio R

$\gamma(t)$ percorre la circonferenza "in verso orario"



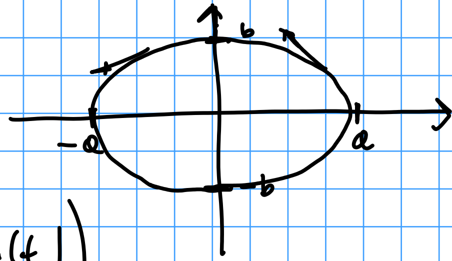
$$\gamma'(t) = R(-\sin(t), \cos(t))$$

lunghezza di γ $= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} R\sqrt{\sin^2+\cos^2} = 2\pi R$

(come c'era da aspettarsi ...)

Aggiungendo un parametro posso "descrivere" l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\gamma(t) = \left(a\cos(t),\ b\sin(t)\right)$$

$$\gamma'(t) = \left(-a\sin(t),\ b\cos(t)\right)$$

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos(t)}\,dt \quad \leftarrow \text{ NON SI RISOLVE}$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(a^2-b^2)\sin^2(t) + b^2}\,dt$$

<u>OSSERVO CHE</u> si possono descrivere circonferenze nello spazio

Se prendo $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$ in $\mathbb{R}^3$ con $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$, $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$

allora posso considerare $\boxed{\gamma(t) = R\cos(t)\,\vec{e}_1 + R\sin(t)\,\vec{e}_2}$

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$. È chiaro che $\|\gamma(t)\| = R$

infatti $\|\gamma(t)\|^2 = \gamma(t) \cdot \gamma(t) =$

$$\left(R\cos(t)\,\vec{e}_1 + R\sin(t)\,\vec{e}_2\right) \cdot \left(R\cos(t)\,\vec{e}_1 + R\sin(t)\,\vec{e}_2\right) =$$

$$R^2\left(\cos^2(t)\,\underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}_{1} + 2\cos(t)\sin(t)\,\underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}_{=0} + \sin^2(t)\,\underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2}_{=1}\right) =$$

$$R^2\left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right) = R^2 \qquad \text{DUNQUE } \|\gamma(t)\| = R \quad \forall t$$

Inoltre $\gamma(t) \in$ Piano generato da $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$

VICEVERSA – SI DIMOSTRA – se $P \in$ piano$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ e $\|P\| = R$

allora $P = \gamma(t)$ per un $t \in [0, 2\pi]$ ...)

Per esempio $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ VANNO BENE

Come posso descrivere il piano generato da $\vec{e}_1$ $\vec{e}_2$: cerco

$\vec{e}_3$ ortogonale a $\vec{e}_1$ e a $\vec{e}_2$ $\qquad \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2$

(Prodotto vettoriale - servirà più avanti)

$$\vec{e}_3 = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & 1 & 1 \\ \vec{j} & 1 & -1 \\ \vec{k} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \vec{i}\,(1) - \vec{j}\,(1) + \vec{k}\,(-2)$$

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Allora

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} (x, y, z) \downarrow$$

$$\text{Piano}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \; (= \text{SPAN}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)) = \underbrace{\{(x,y,z) : x - y - 2z = 0\}}$$

La circonferenza si scrive

$$\gamma(t) = R\left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}} + \frac{\sin(t)}{\sqrt{3}},\; \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}} - \frac{\sin(t)}{\sqrt{3}},\; \frac{\sin(t)}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\gamma'(t) = R\left(-\frac{\sin(t)}{\sqrt{2}} + \frac{\cos(t)}{\sqrt{3}},\; -\frac{\sin(t)}{\sqrt{2}} - \frac{\cos(t)}{\sqrt{3}},\; \frac{\cos(t)}{\sqrt{3}} \right)$$

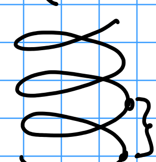
$$\|\gamma'(t)\| = R\sqrt{\left(-\frac{\sin(t)}{\sqrt{2}} + \frac{\cos(t)}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{\sin(t)}{\sqrt{2}} - \frac{\cos(t)}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{\cos(t)^2}{3}}$$

$$= R\sqrt{\frac{\sin^2(t)}{2} + \frac{\cos^2(t)}{3} - \cancel{\frac{2\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{6}}} + \frac{\sin^2(t)}{2} + \frac{\cos^2(t)}{3} + \cancel{\frac{2\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{6}}} + \frac{\cos^2(t)}{3}}$$

$$= R\sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

TORNA .-

ELICA $\quad \gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t), \alpha t) \qquad t \in \mathbb{R}$



PASSO = $\alpha\, 2\pi$

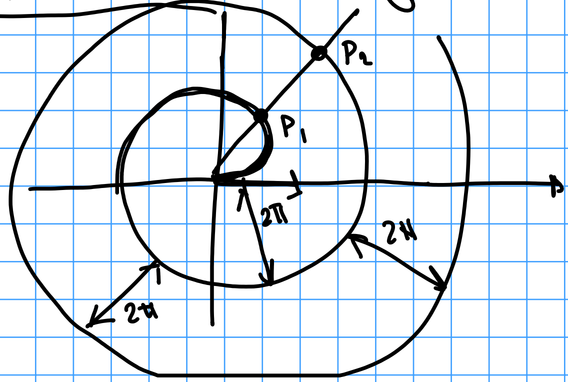
$$\gamma'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t), \alpha)$$

lunghezza di γ tra 0 e 2π:

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 + R^2\cos^2 + \alpha^2}\, dt = 2\pi\sqrt{R^2 + \alpha^2}$$

SPIRALI (in $\mathbb{R}^2$)

Spirale Archimedea : $\gamma(t) = t\,(\cos(t), \sin(t))$ $t \geq 0$



IL SOST. IN COORDINATE POLARI SI INDIVIDUA DALLA RELAZIO

$$\boxed{\theta = r}$$

$\|\gamma(t)\| = t$ $\qquad e_1 \cdot e_2 = 0$

VEDIAMO $\gamma'(t) = \overbrace{(\cos(t), \sin(t))}^{e_1} + \overbrace{t\,(-\sin(t), \cos(t))}^{e_2}$

$$\boxed{\|\gamma'(t)\|^2 = 1 + t^2} \qquad \gamma'(0) = (1, 0)$$

$$\|e_1 + e_2\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + 2\,\underbrace{e_1 \cdot e_2}_{=0}$$

Se prendo una retta $r(s) = s\,\vec{v}$ $\quad \|\vec{v}\| = 1$

e vado a vedere due intersezioni "consecutive" P_1 P_2 tra la spirale e la retta vedo che $P_1 = \gamma(t_1) \Rightarrow P_2 = \gamma(t_1 + 2\pi)$

$$\Rightarrow \|P_1 - P_2\| = \| t_1 (\cos(t_1), \sin(t_1)) - (t_1 + 2\pi)\underbrace{(\cos(t_1 + 2\pi), \sin(t_1 + 2\pi))}_{=}\|$$

$= 2\pi$

Possiamo calcolare la lunghezza "del primo giro"

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\, dt$$ (potrei usare $t = \sinh(s)$, MA USO UN ALTRO MODO)

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \int_0^{2\pi} t\, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\, dt =$$

$$\left(\frac{d}{dt} \sqrt{1+t^2} = \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}} \right)$$

$$\operatorname{arcsinh}(2\pi) + \left[t \sqrt{1+t^2} \right]_0^{2\pi} +$$

$$- \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\, dt \implies$$ (porto l'ultimo integrale a sx)

$$\Rightarrow \quad 2\int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\, dt = \operatorname{arcsinh}(2\pi) + 2\pi\sqrt{1+4\pi^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{\operatorname{arcsinh}(2\pi)}{2} + \pi\sqrt{1+4\pi^2} \quad \leftarrow \quad !!$$