Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 12 25/10/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

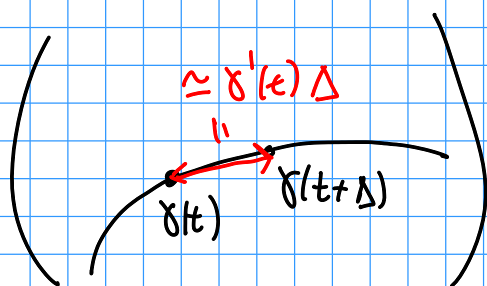
Ricevimento su appuntamento da concordare per email

INTEGRALE CURVILINEO di I^a SPECIE

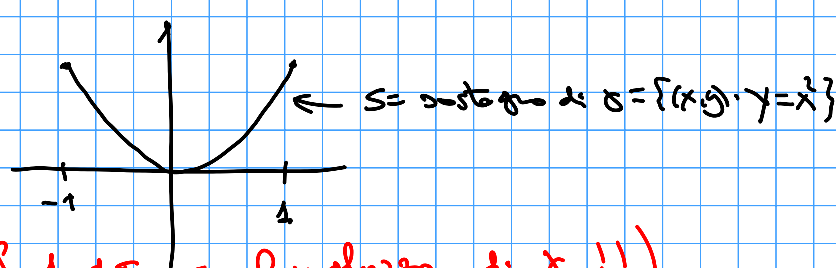
(si integrano "funzioni scalari".

Def. Considero una curva $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^N$, di classe C^1, e sia $f: S\to\mathbb{R}$, continua dove $S=$ sostegno di γ.
(devo poter calcolare f nei punti $\gamma(t)$!)
Definisco l'integrale di f su γ come:

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt$$



ESEMPIO $\gamma(t)=(t,t^2)$, $-1\le t\le 1$, il sostegno di γ è il grafico della parabola $y=x^2$ $-1\le x\le 1$



Prendiamo $f(x,y)=1$ ($\int_\gamma 1\,ds =$ lunghezza di γ !!)

$$\int_\gamma 1\,ds = \int_{-1}^{1} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_{-1}^{1}\|(1,2t)\|\,dt = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+4t^2}\,dt$$

SOSTITUZ.: $2t = \sinh(s) \Rightarrow 2\,dt = \cosh(s)\,ds \Rightarrow$

$$2\int_0^1\sqrt{1+4t^2}\,dt = \cancel{2}\int_0^{\operatorname{arcsinh}(2)=:A} \underbrace{\sqrt{1+\sinh^2(s)}}_{\cosh^2(s)}\,\frac{\cosh(s)\,ds}{\cancel{2}} = \underbrace{\int_0^A \cosh(s)^2\,ds}_{} =$$

(per parti) $\left[\sinh(s)\cosh(s)\right]_0^A - \int_0^A \sinh^2(s)\,ds =$

$$\sinh(A)\cosh(A) - 0 + \int_0^A\left(-\cosh^2(s)+1\right)ds \qquad \left(\cosh^2-\sinh^2=1\right)$$

lo porto a sinistra

$$2\int_0^A\cosh^2(s)\,ds = \sinh(A)\cosh(A)+A$$

$$\Rightarrow \int_0^A\cosh^2(s)\,ds = \frac{2\sqrt{1+\sinh^2(A)} + \operatorname{arcsinh}(2)}{2} = \sqrt{5} + \frac{\operatorname{arcsinh}(2)}{2}$$

$$\int_\gamma ds = \sqrt{5}+\frac{\operatorname{arcsinh}(2)}{2}$$

IN GENERALE $\int_\gamma ds$ È (per definizione) LA LUNGHEZZA γ

(DEF.) $= \int_0^b \|\gamma'(t)\|\,dt$

CI SI POTREBBE ARRIVARE IN MODO "GEOMETRICO":

Dato un arco $\gamma:[0,b]\to\mathbb{R}^N$ posso considerare una suddivisione σ di $[0,b]$ cioè un numero finito di punti

$a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$ $\quad(\sigma=\{t_0,\dots,t_n\})$

Per ogni suddivisione σ posso considerare

$$\ell_\sigma(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\| =$$

$$\|\gamma(t_1)-\gamma(\overset{a}{t_0})\| + \|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)\| + \dots + \|\gamma(\overset{b}{t_n})-\gamma(t_{n-1})\|$$

ℓ_σ = lunghezza della "spezzata"...

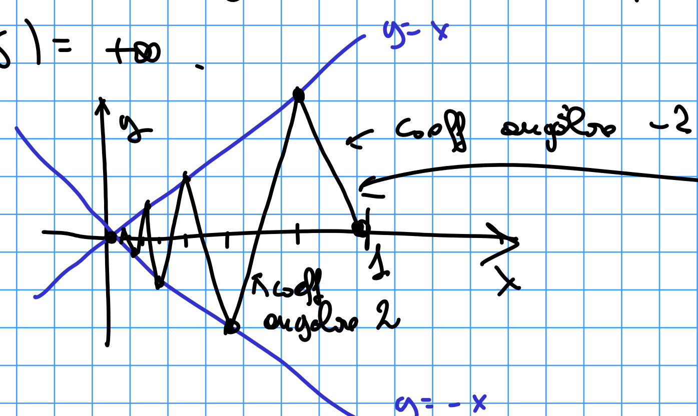
SI PUÒ DIMOSTRARE CHE, se γ è C^1 allora

$$\boxed{\sup_{\sigma} \ell_\sigma} = \overbrace{\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt}^{\int_\gamma ds} =: \ell(\gamma)$$

DUNQUE ha senso chiamare lunghezza di γ quell'integrale!

<u>NOTA</u> Il sup. scritto sopra si può fare sempre: potrei definire $\ell(\gamma)$ per qualunque curva. PERÒ potrebbe venire $\ell(\gamma) = +\infty$.

<u>Per esempio</u>



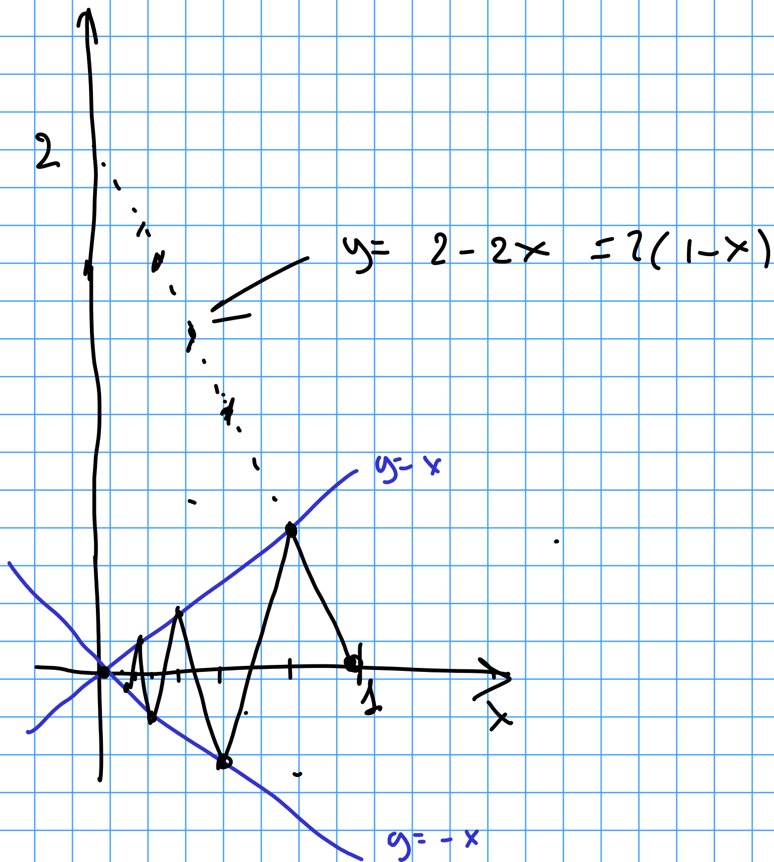
la chiamo g

$(g(0)=0)$

$\gamma(t) = (t, g(t))$

si può dimostrare che la curva $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, definita a tratti come il grafico "della figura nera" sopra è una curva continua (non C^1) ($\gamma(0)=0$!). Si può fare il conto della lunghezza di γ: SI PUÒ DIM CHE VIENE $\sqrt{5}$

VEDI FIGURA SOTTO (non è una dim. ma dà l'idea)

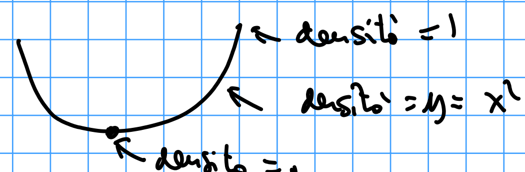


IMITANDO L'ESEMPIO, se prendo inclinazioni crescenti quando mi avvicino a zero, posso costruire un esempio di curva continua di lunghezza infinita.

ALTRO ESEMPIO $\qquad \gamma : [-1,1]$ quella di prima

$\boxed{\gamma(t) = (t, t^2)}$ $\qquad \left(\Rightarrow \gamma'(t) = (1, 2t), \ \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+4t^2} \right)$

$f(x,y) = y$



$\Rightarrow$ tiene il peso

$$\int_\gamma y \, ds \qquad \left(\text{qui } f(x,y) = y \right)$$

$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{t^2}_{f(\gamma(t))} \sqrt{1+4t^2} \, dt = 2\int_0^1 t^2 \sqrt{1+4t^2} \, dt =$$

$$\frac{1}{4} \int_0^1 t \left(8t \sqrt{1+4t^2} \right) dt$$

NOTO CHE $\int 8t\sqrt{1+4t^2} = \frac{2}{3}\left(1+4t^2\right)^{3/2}$ $\left(\xrightarrow{\text{derivo}} (1+4t^2)^{1/2}\, 8t \ !!\right)$

$$\Rightarrow \left[t \cdot \frac{2}{3}\left(1+4t^2\right)^{3/2}\right]_0^A - \int_0^A \left(1+4t^2\right)^{3/2}$$

BRUTTO

NO

RINUNCIAMO A INTEGRARE PER PARTI – TORNIAMO ALLA SOSTITUZIONE

$2t = \sinh(s) \quad dt = \frac{1}{2}\cosh(s)\, ds$

$$2\int_0^1 t^2\sqrt{1+4t^2} = 2\int_0^A \frac{\sinh^2(s)}{4}\sqrt{1+\sinh^2}\ \frac{\cosh(s)}{2}\, ds$$

$(A = \operatorname{arcsinh}(2))$

$$= \frac{1}{4}\int_0^A \sinh^2(s)\cosh^2(s)\, ds = (*)$$

(uso le formule $\sinh(2s) = 2\sinh(s)\cosh(s)$

$\cosh(2s) = \cosh^2(s) + \sinh^2(s) = 1 + 2\sinh^2(s)$)

$\Rightarrow \sinh^2(s) = \frac{\cosh(2s)-1}{2}$

$$(*) = \frac{1}{4}\int_0^A \left(\frac{\sinh(2s)}{2}\right)^2 ds = \frac{1}{16}\int_0^A \sinh^2(2s)\, ds =$$

$$\frac{1}{16}\int_0^A \frac{\cosh(4s)-1}{2}\, ds = \frac{1}{32}\left[\frac{\sinh(4s)}{4} - s\right]_0^A =$$

$$\frac{1}{32}\left(\frac{\sinh(4A)}{4} - A\right) = \frac{1}{32}\ \frac{2\sinh(2A)\cosh(2A)}{4} - \frac{A}{32} =$$

$$\frac{1}{64}\ 2\,\overbrace{\sinh A}^{=2}\ \overbrace{\cosh A}^{=\sqrt{5}}\sqrt{1+\sinh^2(2A)} - \frac{A}{32} =$$

$$\frac{1}{16}\sqrt{5}\sqrt{1+\Big(2\underbrace{\sinh(A)}_{2}\underbrace{\cosh(A)}_{\sqrt{5}}\Big)^2} - \frac{A}{32} =$$

$$\frac{1}{16}\sqrt{5}\sqrt{\underbrace{1+16\cdot 5}_{81}} - \frac{A}{32} = \frac{9}{16}\sqrt{5} - \frac{\operatorname{arcsinh}(2)}{32}$$

(salvo errori ...)

DEF. Se γ è una curva C^1 in $\mathbb{R}^3$ γ. CHIAMO "CENTRO GEOMETRICO" di γ il punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ definito da

$$\bar{x} = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_\gamma x \, ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_\gamma y \, ds, \quad \bar{z} = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_\gamma z \, ds$$

(se γ sta in $\mathbb{R}^2$ c'è solo $(\bar{x}, \bar{y})$)

(Se $\sigma(x,y,z)$ è la densità nel punto $(x,y,z) \in$ sostegno allora posso definire il BARICENTRO come il punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ dove

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_\gamma x \sigma(x,y,z) \, ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \int_\gamma y \sigma(x,y,z) \, ds, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \int z \sigma \, ds$$

e $M = \displaystyle\int_\gamma \sigma(x,y,z) \, ds$ ($M =$ massa del filo)

Se $\sigma = 1$ RITROVO IL "CENTRO GEOMETRICO"

NELL'ESEMPIO DI PRIMA ABBIAMO CALCOLATO $(\gamma(t) = (t, t^2))$

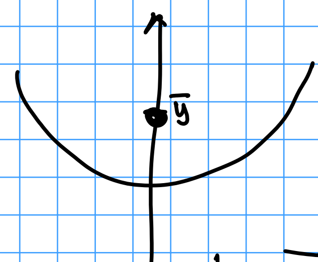
$$\int_\gamma y \, ds = \frac{9}{4}\sqrt{5} - \frac{\operatorname{arcsinh}(2)}{8}$$

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma ds = \sqrt{5} + \frac{\operatorname{arcsinh}(2)}{2}$$

$\Rightarrow$ il rapporto tra questi due integrali mi dà la coordinata

$\bar{y}$ del centro di γ e cioè

$$\bar{y} = \frac{\frac{18\sqrt{5} - \operatorname{arcsinh}(2)}{8}}{\frac{2\sqrt{5} + \operatorname{arcsinh}(2)}{2}} = \frac{1}{4} \, \frac{18\sqrt{5} - \operatorname{arcsinh}(2)}{2\sqrt{5} + \operatorname{arcsinh}(2)}$$



Si può anche calcolare la coordinata $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_\gamma x \, ds = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_{-1}^{1} t\sqrt{1+4t^2} \, dt = 0$$ perché l'integranda è dispari !!

GENERALIZZAZIONE Se γ è C^1 a tratti e $f : S \to \mathbb{R}$ è continua (S = sostegno di γ) DEFINISCO

$$\int_\gamma f \, ds = \sum_{i=1}^{K} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$$

dove $t_0 \dots t_K$ sono i punti in $[a,b]$ tali che la restrizione di γ a $[t_{i-1}, t_i]$ è C^1.

PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI CURVILINEI (di I^a specie)

(1) (indipendenza da cambi di parametro)

Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ C^1, $\varphi : [a_1, b_1] \to [a,b]$ di classe C^1 bigettiva, $\gamma_1(s) := \gamma(\varphi(s))$ $(\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^N)$

(oppure C^1 a tratti ...)

ALLORA (γ e γ_1 hanno lo stesso sostegno S) e per ogni funzione continua $f: S \to \mathbb{R}$

$$\int_{\gamma_1} f \, ds = \int_{\gamma} f \, ds$$

<u>Dim.</u> Applico la definizione

$$\int_{\gamma_1} f \, ds = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(s)) \|\gamma_1'(s)\| \, ds =$$

MA $\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s)) \Rightarrow \gamma_1'(s) = \gamma'(\varphi(s)) \, \varphi'(s)$ DUNQUE

$$\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(\varphi(s))) \, \|\gamma'(\varphi(s))\| \, |\varphi'(s)| \, ds = \begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \text{due casi}$$

NOTO CHE φ è BIGETTIVA $\Leftrightarrow$ φ è strettamente monotona $\Leftrightarrow$

(1) o φ strett. crescente $\Rightarrow \varphi' \geq 0$ in $[a_1, b_1]$, $\varphi(a_1) = a$ $\varphi(b_1) = b$

(2) o φ strett. decrescente $\Rightarrow \varphi' \leq 0$ in $[a_1, b_1]$, $\varphi(a_1) = b$, $\varphi(b_1) = a$

Nel caso (1) continuando l'integrale diventa

$$\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(\underbrace{\varphi(s)}_{t})) \|\gamma'(\underbrace{\varphi(s)}_{t})\| \underbrace{\varphi'(s) \, ds}_{dt} \quad \leftarrow \text{sostituisco } t = \varphi(s), \; dt = \varphi'(s) \, ds$$

$$= \int_{\varphi(a_1)}^{\varphi(b_1)} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_\gamma f \, ds$$

Nel caso (2), facendo i calcoli analoghi, ho

$$\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(\underbrace{\varphi(s)}_{t})) \|\gamma'(\underbrace{\varphi(s)}_{t})\| \underbrace{(-\varphi'(s)) \, ds}_{dt} = \text{ stessa sostituzione}$$

$$- \int_{\varphi(a_1)}^{\varphi(b_1)} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt = - \int_b^a f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt = \underset{\text{GIRO GLI ESTREMI}}{\cdots} = \int_\gamma f \, ds$$

TORNA! DUNQUE ANCHE SE NELLA RIPARAMETRIZZAZIONE CAMBIO VERSO, IL VALORE DELL'INTEGRALE NON CAMBIO

- PER ESEMPIO γ e $\tilde{\gamma}$ HANNO LA STESSA LUNGHEZZA

(2) (LINEARITÀ)

$$\int_\gamma (\lambda f + \mu g)\, ds = \lambda \int_\gamma f\, ds + \mu \int_\gamma g\, ds$$

(con le opportune condizioni)

ESISTE PER QUANTO SOTTO

(3) $$\left| \int_\gamma f\, ds \right| \leq \max_{P \in S} |f(P)|\ \ell(\gamma)$$

$f : S \to \mathbb{R}$ continua, $S =$ sostegno

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ C^1 (C^1 a tratti)

$$\boxed{\text{si può verificare che } S = \gamma([a,b]) \text{ è chiuso e limitato}}$$

Fatto generale: se A è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}^M$, f è continua. Allora $B = f(A)$ è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^M$

(LEGATO A WEIERSTRASS)

Dim $$\left| \int_\gamma f\, ds \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt \right| \leq$$

$$\int_a^b \underbrace{\max_{P \in S} |f(P)|}_{\text{NON DIPENDE PIÙ DA } t \text{ DUNQUE ESCE DALL'INTEGRALE}} \|\gamma'(t)\|\, dt = \max_{P \in S} |f(P)|\ \ell(\gamma)$$

(FINE)