Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 11 24/10/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Al solito il proiettore dell'aula B11 non va d'accordo col mio PC. Quello che segue è un riassunto della lezione

È stato fatto sostanzialmente il paragrafo 2.1 delle note (def di curve, curve $C^1$, $C^1$ a tratti, regolari, regolari a tratti, cambi di parametro, curva "opposta" $\tilde{\gamma}$, derivata di una curva, retta tangente, regole di calcolo delle derivate e la disuguaglianza

$$\| \gamma(t_2) - \gamma(t_1) \| \leq \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \|\gamma'(t)\| \, |t_2 - t_1|$$

INOLTRE CI SONO ALCUNI ESEMPI.

ESEMPIO $\gamma(t) = (t^2, t^3) \qquad -1 \leq t \leq 1$

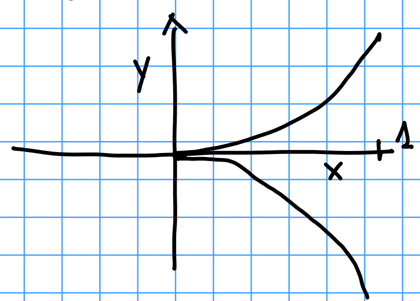
$\gamma$ è $C^1$ e $\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$ (evidente!)

Vediamo chi è $S$: sostegno di $\gamma$. Notiamo che se $t \in [0,1]$ e se $\gamma(t) = (x, y)$ otteniamo $x = t^2 \Rightarrow y = t^3 = (t^2)^{3/2} = x^{3/2}$

DUNQUE $\gamma(t)$ appartiene al grafico della funzione $f(x) = x^{3/2}$ per $0 \leq x \leq 1$.

Se invece $-1 \le t \le 0$ da $\gamma(t) = (x, y)$ ricavo
$x = t^2$, $y = t^3 = -(-t)^3 = -(\sqrt{(-t)^2})^3 = -((-t)^2)^{3/2} = -(t^2)^{3/2} = -x^{3/2}$
e cioè $\gamma(t)$ appartiene al grafico di $g(x) = -x^{3/2}$.
VICEVERSA è facile vedere che, se $0 \le x \le 1$ e $y = x^{3/2}$ (oppure $y = -x^{3/2}$) posso definire $t = \sqrt{x}$ ($t = -\sqrt{x}$) e ottenere $0 \le t \le 1$ ($-1 \le t \le 0$) e $\gamma(t) = (x, y)$. DUNQUE

Sostegno di $\gamma = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ y = x^{3/2}\} \cup \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ y = -x^{3/2}\}$




NOTIAMO CHE $\gamma'(0) = 0$ !!
Dunque $\gamma$ è $C^1$ MA NON è REGOLARE. Questo esempio mostra che essere $C^1$ non impedisce che il sostegno abbia "punti spigolosi / di cuspide"

Poniamo ora
$$\gamma_1(t) = (t, t^{3/2}) \qquad 0 \le t \le 1$$
$$\gamma_2(t) = (t, -t^{3/2}) \qquad 0 \le t \le 1$$

Anche $\gamma_1$ e $\gamma_2$ sono $C^1$, ANZI SONO REGOLARI, perché
$$\gamma_1'(t) = \left(1, \frac{3}{2} t^{1/2}\right) \qquad \|\gamma_1'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{9}{4} t} \neq 0$$
$$\gamma_2'(t) = \left(1, -\frac{3}{2} t^{1/2}\right) \qquad \|\gamma_2'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{9}{4} t} \neq 0$$

È facile verificare che

sostegno di $\gamma_1 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ y = x^{3/2}\}$ (grafico di $f$)

sostegno di $\gamma_2 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ y = -x^{3/2}\}$ (grafico di $g$)

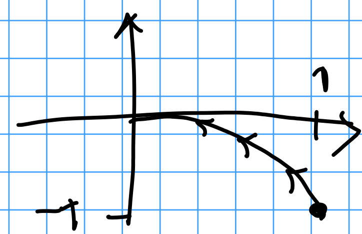
- È stato anche definito l'incollamento di curve consecutive (def. 2.2.6 delle note).

- CONTINUAZIONE DELL'ESEMPIO:

Consideriamo la curva opposta $\tilde{\gamma}_2$ di $\gamma_2$:

$$\tilde{\gamma}_2(t) = \gamma(1-t) = \left(1-t, -(1-t)^{3/2}\right) \qquad 0 \le t \le 1$$

$\tilde{\gamma}_2$ ha sempre come sostegno il grafico di $f$ ma parte da $(1,-1)$ e arriva in $(0,0)$




Facciamo un altro cambio di parametro in $\tilde{\gamma}_2$ "TRANSLANDO" la $t$ da $[1,0]$ a $[-1,0]$. Definiamo

$$\hat{\gamma}_2(t) = \tilde{\gamma}_2(1+t) \qquad -1 \le t \le 0$$

Dunque

$$\hat{\gamma}_2(-1) = \tilde{\gamma}_2(0) = (0,-1) \qquad \hat{\gamma}_2(0) = \tilde{\gamma}_2(1) = (0,0)$$

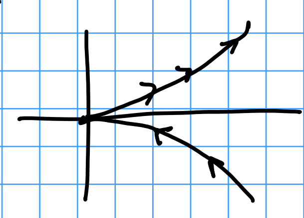
Volendo possiamo scrivere esplicitamente $\hat{\gamma}_2(t)$

$$\hat{\gamma}_2(t) = \tilde{\gamma}_2(1+t) = \gamma_2(1-(1+t)) = \gamma_2(-t) = \left(-t, -(-t)^{3/2}\right)$$
$$(-1 \le t \le 0)$$

Sia $\hat{\gamma}_2$ che $\tilde{\gamma}_2$ sono regolari, come si vede facilmente.
Inoltre $\hat{\gamma}_2$ e $\gamma_1$ sono consecutive perché $\hat{\gamma}_2$ è definito su $[-1,0]$, $\gamma_1$ è definito su $[0,1]$ $\hat{\gamma}_2(0) = \gamma_1(0) = (0,0)$

DUNQUE POSSIAMO INCOLLARE $\hat{\gamma}_2$ e $\gamma_1$ ottenendo la curva $\hat{\gamma}_2 \vee \gamma_1$ che parte da $(0,-1)$ e arriva a $(0,1)$

Si può verificare che $\hat{\gamma}_2 \vee \gamma_1$ è una riparametrizzata della $\gamma$ iniziale.



Però $\hat{\gamma}_2 \vee \gamma_1$ è REGOLARE A TRATTI (dato che è l'incollamento di due curve regolari) e NON è REGOLARE dato che in $t=0$ non esiste la derivata di $\hat{\gamma}_2 \vee \gamma_1$. In effetti

$$\frac{d}{dt^+}\left(\hat{\gamma}_2 \vee \gamma_1\right)(0) = \frac{d}{dt}\gamma_1(0) = (1,0)$$

$$\frac{d}{dt^-}\left(\hat{\gamma}_2 \vee \gamma_1\right)(0) = \frac{d}{dt}\hat{\gamma}_2(0) = \frac{d}{dt}\tilde{\gamma}_2(1) = -\frac{d}{dt}\gamma_2(0) = (-1,0)$$

!!

CONTROESEMPIO A LAGRANGE: Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ è $C^1$ non è detto

$$\frac{\gamma(b)-\gamma(a)}{b-a} = \gamma'(\xi) \qquad \text{con } \xi \in [a,b]$$

Per esempio se $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$$\therefore \frac{\gamma(2\pi)-\gamma(0)}{2\pi - 0} = \frac{1}{2\pi}\Big((1,0)-(1,0)\Big) = (0,0)$$

ma $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ è sempre $\neq 0$ !!

ESEMPIO (rette) Se $P_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ $\vec{v} \neq 0$, allora

$$r(t) = P_0 + t\vec{v} \qquad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

è una curva il cui sostegno $R$ è la retta passante per $P_0$ $(t=0)$ diretta secondo $\vec{v}$. Per trovare una descrizione di $R$ possiamo trovare $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{N-1}$ vettori linearmente indipendenti e ortogonali a $\vec{v}$ $(\vec{v}_i \cdot \vec{v} = 0)$

Allora è chiaro che per ogni $t$ si ha

$$(r(t) - P_0) \cdot \vec{v}_i = t\vec{v} \cdot \vec{v}_i = 0 \qquad i = 1, \dots, N-1$$

Viceversa se $P \in \mathbb{R}^N$, $P-P_0$ è ortogonale a tutti i $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{N-1}$ allora $P-P_0 = t\vec{v}$ per un $t \in \mathbb{R}$ cioè $P = P_0 + t\vec{v} = r(t)$.

DUNQUE

$$\text{sostegno}(r) = \{ P \in \mathbb{R}^N : (P-P_0)\cdot \vec{v}_i \quad i = 1, \dots, N-1 )$$

Per esempio consideriamo $P_0 = (1,-1,1)$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(in $\mathbb{R}^3$). Allora

$$r(t) = P_0 + t\vec{v} = (1+t, -1, 1-t)$$

Possiamo prendere $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(si vede facilmente che $\vec{v}_1 \cdot \vec{v} = 0$, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$, $\vec{v} \cdot \vec{v}_2 = 0$).

Per quanto detto sopra il sostegno della retta $r$ è l'insieme

$$R = \{ (x,y,z) : (x-1)\cdot 1 + (y+1)\cdot 0 + (z-1)\cdot 1 = 0,$$
$$(x-1)\cdot 0 + (y+1)\cdot 1 + (z-1)\cdot 0 = 0 \} =$$

$$\{ (x,y,z) : x + z = 2, \; y = -1 \}$$

#