Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 10 19/10/2022

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

- NOZIONE DI COMPLETEZZA: ogni successione di Cauchy ha limite
- $\mathbb{R}^N$ (ogni spazio vett. di dim finita) è completo

UN PAIO DI PROPRIETÀ IMPORTANTI

$\mathbb{X}$ con norma $\| \ \|$.

Def. Data una successione (x_n) dirò che la serie degli x_n $\left(\sum_1^\infty x_n\right)$ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE (IN $\mathbb{X}$) se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty \quad (\text{è convergente})$$

(Noto che $\boxed{\|x_n\| \geq 0}$ dunque $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ può essere convergente o divergente a $+\infty$; ha senso scrivere $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \in [0, +\infty]$)

Teorema Se $\mathbb{X}$ è completo ogni serie ass. conv. è convergente.

Dim. Pongo

$$S_n = x_1 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \ , \quad \sigma_n = \|x_1\| + \dots + \|x_n\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

Cerco di dimostrare che (S_n) è di Cauchy. Se ci riesco

$\underset{(X \text{ è completo})}{\Longrightarrow}$ (S_n) ha limite $S \iff$ la serie converge e $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$

Prendo $n \geq m$ interi e valuto

$$\| S_n - S_m \| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \right\| = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|x_i\|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \sum_{i=1}^{m} \|x_i\| = \sigma_n - \sigma_m = |\sigma_n - \sigma_m|$$

$$\| S_n - S_m \| \leq |\sigma_n - \sigma_m| \quad (*)$$

Dato che la serie "$\sum \|x_n\|$" è convergente $\Rightarrow$ σ_n hanno limite ($\sigma_n \to \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$) $\Rightarrow$ (σ_n) è di Cauchy $\Rightarrow$ S_n è di Cauchy

$\Rightarrow$ S_n converge perché X è completo $\Rightarrow$ la serie $\sum x_n$ è convergente

DUNQUE HO DIMOSTRATO LA TESI #

ESEMPIO $\quad X = \mathcal{M}(N,N) \quad \| \; \|$ norma delle matrici.

X è completo perché è di dim finita (è $\simeq \mathbb{R}^{N^2}$)

- Vediamo che se $\|A\| < 1 \Rightarrow$ "$\sum_{n=0}^{\infty} A^n$" è assolutamente convergente. Basta notare che $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ e ricordare

che $\sum \|A\|^n$ converge a $\dfrac{1}{1-\|A\|}$ $\quad (\|A\| < 1)$

serie geometrica di ragione $\|A\|<1$

(ho usato il criterio di confronto per le serie a termini positivi:

$\|A^n\| \leq \|A\|^n$ deduco che $\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n < +\infty \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| < +\infty}_{\sum A^n \text{ è ass. conv.}}$)

Poi, come già visto, è semplice vedere che

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (I-A)^{-1}$$ #

Nello stesso modo posso dimostrare che, dato A $N\times N$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ è convergente. Infatti è ass. conv.

perché $\left\| \frac{1}{n!} A^n \right\| \leq \frac{1}{n!} \|A\|^n$ e so che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|^n = e^{\|A\|}$

ALLORA SCRIVERÒ $e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ (esponenziale di A)

Teorema delle contrazioni

Def. X, $\| \ \|$, $A \subset X$ $f: A \to X$.

Dico che f è una contrazione se esiste $\boxed{0 \leq \alpha < 1}$ tale che

$$\| f(x) - f(y) \| \leq \alpha \|x - y\| \quad \forall x, y \in A$$

(f è Lipschitziana di costante $\boxed{\alpha < 1}$) ($\Rightarrow f$ è continua)

Teorema Se X COMPLETO, $f: A \to A$ è una contrazione, A è chiuso

$\Rightarrow$ esiste, ed è unico, un "punto fisso" cioè un punto $\bar{x} \in A$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Dim. Prendo $x_0 \in A$ (a caso). Costruisco una successione x_n definita da $x_0 = x_0$, $x_{n+1} = f(x_n)$ (ricorsiva)

$x_0 = x_0$, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$, $x_3 = f(x_2) = \dots f(f(f(x_0)))$ ...

$$x_n = \underbrace{f(f \cdots f(x_0))}_{n}$$

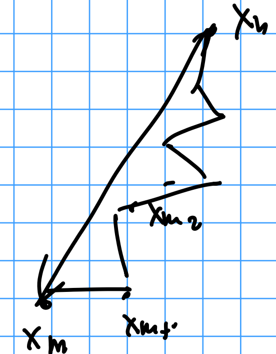
DIMOSTRIAMO CHE (x_n) AMMETTE LIMITE. (dimostro che è di Cauchy)

- $\|x_{n+1}-x_n\| = \|f(x_n)-f(x_{n-1})\| \le \alpha\|x_n-x_{n-1}\| = \alpha\|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})\|$

$$\le \alpha\alpha\|x_{n-1}-x_{n-2}\| \cdots\cdots \alpha^n\|x_1-x_0\|$$

$$\forall n \qquad \|x_{n+1}-x_n\| \le \alpha^n\|x_1-x_0\|$$

- Siano $n \ge m$ interi e valutiamo



$$\|x_n-x_m\| \le \|x_n-x_{n-1}\|+\dots+\|x_{m+1}-x_m\|$$

$$= \sum_{i=m}^{n-1}\|x_{i+1}-x_i\| \le \|x_1-x_0\|\sum_{i=m}^{n-1}\alpha^i \le$$

$$\|x_1-x_0\|\sum_{i=m}^{\infty}\alpha^i = \|x_1-x_0\|\,\alpha^m\sum_{i=m}^{\infty}\alpha^{\underbrace{i-m}_{j}} = \|x_1-x_0\|\,\alpha^m\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j}_{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\boxed{n\ge m \Rightarrow \|x_n-x_m\| \le \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\|x_1-x_0\|}$$

mi dice che (x_n) è di Cauchy. ($\alpha^m \to 0$ se $m\to\infty$)

$\rightsquigarrow$ (X è completo) x_n ha limite: $x_n \longrightarrow \bar{x}$

. Dato che f è continua $f(x_n)\to f(\bar x)$

Ma $f(x_n) = x_{n+1} \longrightarrow \bar x$

$\Rightarrow f(\bar x)=\bar x$

UNICITÀ DI $\bar x$: se ci fossero due pti fissi $\bar x$ e $\bar x'$

allora $\|f(\bar x)-f(\bar x')\| = \|\bar x-\bar x'\|$

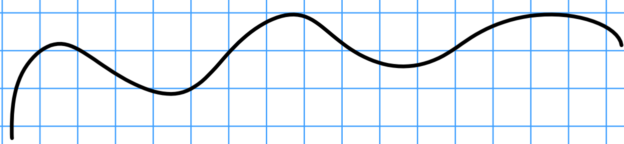
$\quad \le \alpha\|\bar x-\bar x'\|$

$\|\bar x-\bar x'\|\le\alpha\|\bar x-\bar x'\|$

$\Downarrow$

$\|\bar x-\bar x'\|=0$ oppure $1\le\alpha$ NO

CURVE (in $\mathbb{R}^N$)



UN OGGETTO UNIDIMENSIONALE IN $\mathbb{R}^N$

COME LO DESCRIVO ?? (DESCRIZIONE PARAMETRICA)

Def. Chiamo curva in $\mathbb{R}^N$ una funzione $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo.

Considereremo sempre curve continue e spesso considereremo curve derivabili. Dato che $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t)\big)$ dove $\gamma_1 \dots \gamma_N$ sono funzioni da $I \to \mathbb{R}$ (le componenti)

· γ derivabile vuol dire $\gamma_1 \dots \gamma_N$ DERIVABILI

$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_N'(t))$ (è un vettore "velocità")

CHIAMO "sostegno" di γ l'insieme $\gamma(I) = \{\gamma(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^N$

(più curve possono avere lo stesso sostegno) $\longrightarrow$ LUNEDì