Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 09 18/10/2022

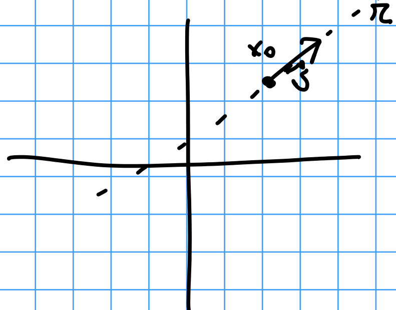
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

ESERCIZI SUI LIMITI (IN DUE VARIABILI)

STRATEGIA: Cerco di individuare il possibile limite guardando i "limiti sulle rette". Se cerco $\lim_{x\to x_0} f(x)$ (in $\mathbb{R}^N$) posso provare a fare

$$\boxed{\lim_{t\to 0} f(x_0+t\vec{v}) \qquad \vec{v}\in\mathbb{R}^N}$$



GUARDO LA "RESTRIZIONE" di f sulla retta $r=\{x_0+t\vec{v},\ t\in\mathbb{R}\}$ che passa per x_0 e ha "direzione" $\vec{v}$

$$\boxed{\text{CERCO } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)}$$

(1) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Fisso un vettore $(v_x,v_y)\neq(0,0)$ e mi metto sulla retta $\{t(v_x,v_y)\}$ $\big(x_0=(0,0)\big)$

e provo a fare il limite sulle rette:

$$\lim_{t\to 0} \frac{(tv_x)(tv_y)}{(tv_x)^2+(tv_y)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^2} v_x v_y}{\cancel{t^2}(v_x^2+v_y^2)} = \frac{v_x v_y}{v_x^2+v_y^2}$$ ← CAMBIA SE CAMBIO (v_x, v_y)

Per esempio se prendo $(0,1)$ o $(1,0)$ trovo 0

Ma se prendo $(1,1)$ trovo $\frac{1}{2} \neq$

DUNQUE IL LIMITE NON ESISTE

(2) $$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \qquad \text{cerco } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

Provo sulle rette. Di nuovo fisso $(v_x, v_y) \neq (0,0)$ e faccio

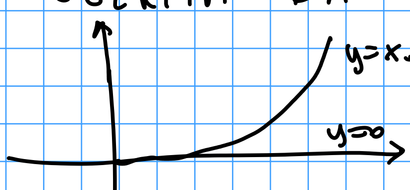
$$\lim_{t\to 0} f((0,0)+t(v_x,v_y)) = \lim_{t\to 0} \frac{(tv_x)^2(tv_y)}{(tv_x)^4+(tv_y)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_x^2 v_y}{\cancel{t^2}(t^2v_x^4+v_y^2)}$$

$$= \begin{cases} v_y \neq 0 \Rightarrow \text{denominatore} \to v_y^2, \text{ numeratore} \to 0 \\ v_y = 0 \Rightarrow \text{denominatore} = t^2 v_x^4 \to 0, \ \underline{\text{numeratore} = 0\ \forall t} \end{cases} = 0$$

IL LIMITE PUÒ ESISTERE; SE ESISTE DEVE ESSERE 0

IN REALTÀ il lim non esiste. Lo vedo prendendo un'altra restrizione: $\boxed{y = x^2}$ (questa si capisce se si nota che $f(x,y) = f_1(x^2,y)$ dove f_1 è quella del primo esercizio)

PERÒ LA RESTRIZIONE ALLA PARABOLA È ANCHE SUGGERITA DAL FATTO CHE il caso $y=0$ "è un po' singolare"



VEDIAMO COSA CI DÀ

$$f(x,x^2) \xrightarrow{x\to 0} ??$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 x^2}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$ IL LIMITE NON ESISTE

---

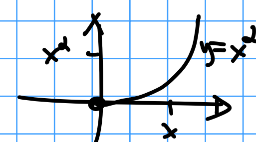
(3) $\dfrac{x y^2}{x^4+y^2}$. Proviamo, come al solito, sulle rette

$(v_x, v_y) \neq 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(t v_x)(t v_y)^2}{(t v_x)^4 + (t v_y)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^3}\, t\, v_x v_y^2}{\cancel{t^2}(t^2 v_x^4 + v_y^2)} =$$

$$\begin{cases} \dfrac{0}{v_y^2} = 0 & \text{se } v_y \neq 0 \\ 0 & \text{anche se } v_y = 0 \text{ perché se } v_y=0 \text{ trovo } \dfrac{0}{t^2 v_x^4} = 0 \end{cases}$$

Proviamo su una restrizione $y = x^\alpha$ $\alpha > 0$



$$\lim_{x\to 0} f(x, x^\alpha) = \lim_{x\to 0} \frac{x\, x^{2\alpha}}{x^4+x^{2\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{2\alpha+1}}{x^4+x^{2\alpha}}$$

andrebbero distinti tre casi $\alpha = 2$ $\left(\dfrac{x^5}{2x^4} \to 0\right)$ $\alpha > 2$ $\left(\simeq \underbrace{\dfrac{x^{2\alpha+1}}{x^4}}\to 0\right)$

$0 < \alpha < 2$ $\left(\simeq \dfrac{x^{2\alpha+1}}{x^{2\alpha}} \to 0\right)$

$$\frac{x^{2\alpha+1}}{x^4+x^{2\alpha}} = \frac{x^{2\alpha+1}}{x^4(1+\underset{\downarrow 0}{x^{2\alpha-1}})}$$

NON TROVO NIENTE !!

VEDIAMO SE PER CASO IL LIMITE ESISTE E FA ZERO

MI SERVE UNA MAGGIORAZIONE con QUALCOSA CHE TENDE A 0

$$\left| \frac{x(y^2 + x^4)}{x^4+y^2} \right| \leq |x| \frac{x^4+y^2}{x^4+y^2} = |x|$$ Dato che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$

VEDO CHE $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x y^2}{x^4+y^2} = 0$ $\left(\dfrac{y^2}{x^4+y^2} \leq 1\right)$

(IN MODO SIMILE VEDO CHE $\dfrac{x^4 y}{x^4+y^2} \to 0$)

4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^4+y^2}$

Vediamo se trovo una maggiorazione con qualcosa che tende a zero.

$$|x^3 y| \le (x^4+y^2)\cdot(\text{qualcosa che tende a zero}) \quad ??$$

ricorda $\boxed{ab \le \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}}$ ← la applico con $a=x^2$ $b=y$

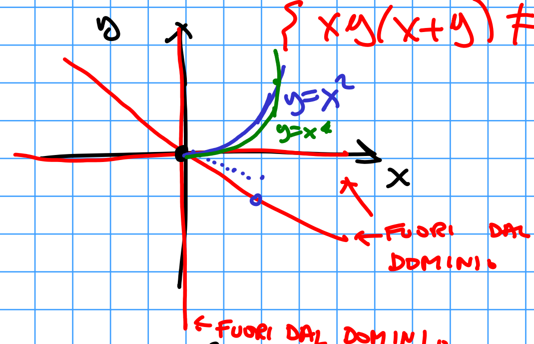
$$|x^2 y| \le \frac{x^4}{2}+\frac{y^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad |x^3 y| \le |x|\left(\frac{x^4}{2}+\frac{y^2}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{|f(x,y)| \le \frac{|x|}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^4+y^2} = 0$$

5) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{xy^2+x^2y}$

$A = \text{DOMINIO} = \{xy^2+x^2y \neq 0\} = \{xy(x+y) \neq 0\}$



$(0,0)$ è di acc. per A

Se per esempio mi metto su $y = x^2$ $\Rightarrow$

$$f(x,x^2) = \frac{x^4+x^8}{x^5+x^4} \longrightarrow 1$$

Mi metto su $y = x^4$ $\Rightarrow$?

$$f(x,x^4) = \frac{x^4+x^{16}}{x^9+x^6} \simeq \frac{x^4}{x^6} \longrightarrow +\infty$$

INVECE su $x=y$ trovo zero:

$$f(x,x) = \frac{x^4+x^4}{x^3+x^3} = \frac{x^4}{x^3} = x \longrightarrow 0$$

$\boxed{\text{LIMITE NON ESISTE}}$

Visto la def. di funzione continua.

Supponiamo $f : A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subset \mathbb{R}^N$

<u>Def.</u> Se $c \in \mathbb{R}$ introduco gli insiemi

$$\{f \leq c\} = \{x \in A : f(x) \leq c\} \quad \text{(sottolivello rel. a } c\text{)}$$
$$\{f < c\} = \{x \in A : f(x) < c\}$$
$$\{f = c\} = \{x \in A : f(x) = c\} \quad \text{(insieme di livello)}$$

SUPPONGO f continua in A.

<u>OSS.</u> (a) Se A è chiuso $\{f \leq c\}$ e $\{f = c\}$ sono chiusi
(in particolare se $A = \mathbb{R}^N \Rightarrow \{f \leq c\}, \{f = c\}$ chiusi)

(b) se A e' aperto $\Rightarrow \{f < c\}$ è aperto
(in part. se $A = \mathbb{R}^N \Rightarrow \{f < c\}$ e' aperto)

(dunque $\{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ e $\{x^2 + y^2 = R^2\}$ sono chiusi.
$\{x^2 + y^2 < R^2\}$ e' aperto
per il fatto che $f(x, y) = x^2 + y^2$ e' continua)

(c) $\partial \{f \leq c\} \subset \{f = c\}$ / $\partial \{f < c\} \subset \{f = c\}$

(con $\leq$)

<u>Dimostro la (a)</u> Per questo prendo una successione (x_n) in $\{f \leq c\}$
e supponiamo che $x_n \to x \in \mathbb{R}^N$ (voglio dim. che $x \in \{f \leq c\}$)

$x_n \in \{f \leq c\}$ significa $x_n \in A$, $f(x_n) \leq c$; dato che $x_n \to x$
se A è chiuso $x \in A$, per la continuità $\Rightarrow f(x) = \lim_n f(x_n) \leq c$
$\Rightarrow x \in \{f \leq c\}$

Stesso procedimento per $\{f = c\}$

(b) non lo dimostro.

(c) $\partial\{f<c\} \subset \{f=c\}$. / (stesso discorso per $\{f\le c\}$)

Se $x_0 \in \partial\{f<c\}$ so che esistono (x_n) e $(\tilde{x}_n)$ tali che

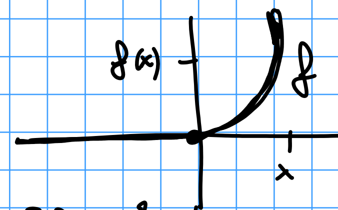
$x_n \in \{f<c\}$ $\quad \tilde{x}_n \notin \{f<c\}$ $\quad$ e $x_n \to x_0$ $\quad \tilde{x}_n \to x_0$.

$$\iff \quad \underset{\downarrow\, f(x_0)}{f(x_n)} < c \qquad \overset{\nearrow f(x_0)}{f(\tilde{x}_n)} \ge c \qquad x_n \to x_0 \quad \tilde{x}_n \to x_0$$

per la continuità di f $\quad f(x_0) \le c$, $f(x_0) \ge c \Rightarrow f(x_0)=c$

OSS. Non è detto che $\partial\{f<c\} = \{f=c\}$ / $\partial\{f\le c\} = \{f=c\}$

PER ESEMPIO $\quad$ prendo $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \ge 0 \\ 0 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$



f è continua.

$\{f \le 0\} =]-\infty, 0]$ $\qquad \partial\{f\le 0\} = \{0\}$ $\not\nearrow$

$\{f < 0\} = \emptyset$ $\quad \not\to \quad \partial\{f<0\} = \emptyset$ $\not\to$

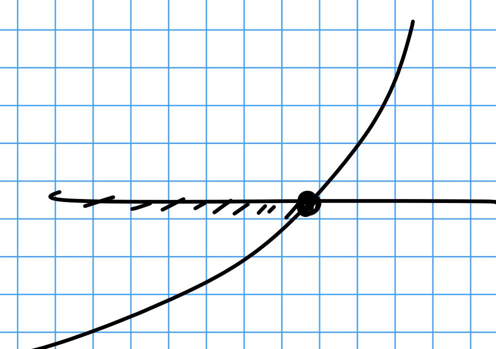
$\{f = 0\} =]-\infty, 0]$

$\partial[a,b] = \{a, b\}$ $\quad$ si vede . .

$\partial\,]-\infty, b] = \{b\}$ $\qquad \partial[a, +\infty[= \{a\}$

/ lo stesso se ho $]a,b[$, $]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$ ...

i punti di frontiera di un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ sono gli estremi.



COMPLETEZZA DI UNO SPAZIO VETTORIALE

X spazio vettoriale, con una norma $\|\cdot\|$

Def. Se (x_n) è una successione in X dico che (x_n) è di Cauchy se

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists\, \bar n \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n,m \geq \bar n \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon \qquad (*)$$

"Se n ed m sono grandi x_n e x_m sono vicini"

Fatto Se (x_n) ha limite $\Rightarrow$ (x_n) è di Cauchy (non lo dimostriamo segue facilmente dalla definizione)

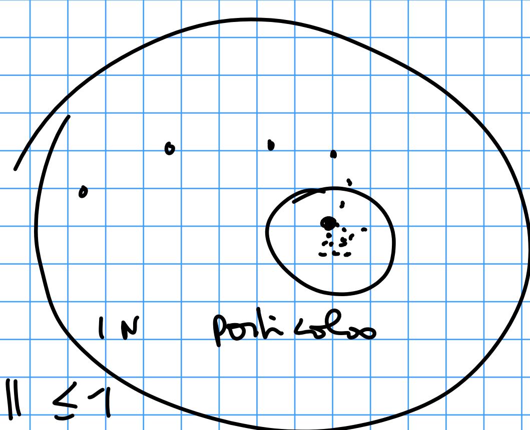
[Il viceverso non vale sempre. (il controesempio è $X = \mathbb{Q}$ = {razionali})
se prendo q_n con $q_n \to \sqrt{2}$ (in $\mathbb{R}$) $q_n \in \mathbb{Q}$
allora (q_n) non ha limite in $\mathbb{Q}$ ma è di Cauchy in $\mathbb{Q}$]

Def. X, con la norma $\|\ \|$, si dice completo se ogni successione di Cauchy converge.

Teorema $\boxed{\mathbb{R}^N \text{ è completo}}$. (ogni X di dim $< +\infty$ è completo)

Dim. Prendiamo una succ. (x_n) in $\mathbb{R}^N$ e supponiamo che valga $(*)$

(a) (x_n) è limitata



Fisso $\varepsilon = 1$ so che $\exists\, \bar n$:

$\forall n, m \geq \bar n \quad \|x_n - x_m\| \leq 1$

$\forall n \geq \bar n \quad \|x_n - x_{\bar n}\| \leq 1$

DUNQUE se $n \geq \bar n$ $\quad x_n \in \overline{B}(x_{\bar n}, 1)$

rimangono esclusi $x_1 \dots x_{\bar n - 1}$ che sono un numero finito di punti

$\Rightarrow x_n \in B(x_{\bar n}, R) \qquad R = \max(1, |x_{\bar n} - x_1| \dots \quad)$

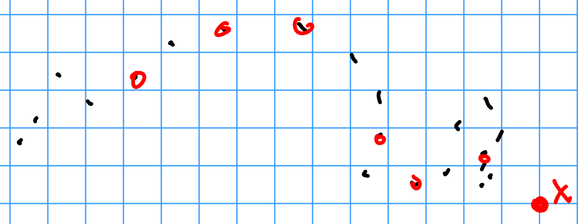
$\Rightarrow$ per B.W. esiste x_{n_k} con $x_{n_k} \longrightarrow x$ per $x \in \mathbb{R}$

(b) $x_n \to x$ (tutta la successione, non solo l'estratta!!)

Infatti so che $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{k} : \forall k \geq \bar{k} \quad \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon}$

$(x_{n_k} \to x)$

so anche che vale (*) dunque $\boxed{\exists \bar{n} : \forall n, m \geq \bar{n} \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon}$



$\Rightarrow$ se $n \geq \bar{n}$ e scelgo $k \geq \bar{k}$ in modo che $n_k \geq \bar{n}$
si vede che lo posso fare

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < 2\varepsilon$$

(che mi dà $x_n \to x$)

$\boxed{\mathbb{R}^N \text{ È COMPLETO; OGNI SUCC. DI Cauchy in } \mathbb{R}^N \text{ HA LIMITE}}$

. Se X è completo $\Rightarrow$ ogni serie ass. convergente è convergente

. vale un teorema di pto fisso

DOMANI !